数理科学特論Ａ～画像数学～　第２回
シリーズ１：画像のサンプリングとディジタル処理
(1) 空間周波数とフーリエ変換

　今回と次回は，ディジタル画像の成り立ちについて説明します．画像は本来輝度が連続的に分布したものですが，コンピュータで取り扱うにはこれを離散的な画素の集まりに直し，さらに各画素の輝度を整数で表現する必要があります．離散的な画素を得ることをサンプリング（標本化, sampling）といい，輝度を整数で表現することを量子化（quantization）といいます．サンプリングする際には，どのくらいの細かさでサンプリングするかが問題になり,「細かさ」を評価する必要があります．細かさを表すのに必要なのが空間周波数の考え方です．今回は，空間周波数の考え方とフーリエ変換について説明します．

光の回折と結像

　まず,「画像の生成」という現象から考えてみましょう．画像を得るには，肉眼にしてもカメラにしても，レンズによる結像という現象が必要です．この現象は，物体の各点から四方八方に出た光が，レンズによって再び点に集められることです．これを別の観点から，次のように見ることができます．

光には回折 (diffraction) という現象があります．回折とは，波が進路を遮られたときに，光が遮へいの裏側へ回り込むことです．例えば，水面の波を板で遮っても，波は板の裏側にまで達します．光は空間の電磁気的な歪みによって生じる波，すなわち電磁波の一種ですから，やはりこの現象を生じます．ラジオ電波は，放送局との間に障害物があっても，回折によって障害物の裏側に届きます．

さて，透過率が周期的に変化している物体，つまり格子状に明暗の帯が並んでいる物体ー回折格子といいますーを光が通過すると，ある帯を通った光が隣の暗部の裏側に回り込んで，となりの帯を通った光と干渉 (interference) をおこします．このとき，各帯を出た光はあちこちに散らばりますが，各帯を出た光の波が１波長分の長さだけずれているような方向では，各波の山と山が重なって強めあうので，この方向には強い光（１次回折光）が出ます．この方向が入射光がそのまま通り抜けた光（０次光）となす角は，明暗の周期が細かいと大きくなります．

明暗の波が黒（透過率０％）と透明（透過率１００％）だけでできている場合は，回折光は１次回折光以外にいくつかの方向に現れますが，明暗の変化が正弦波状になっている場合は，回折光は０次光に対して対称に１つの角度だけで現れます．

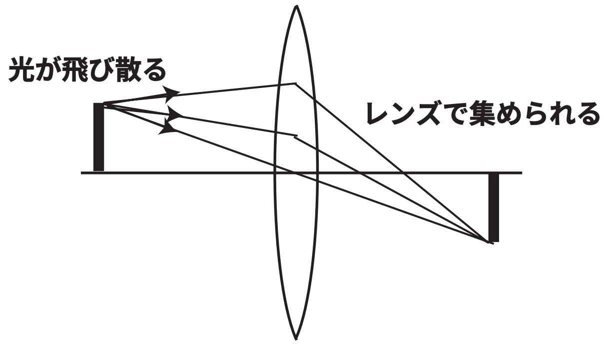

図１．結像

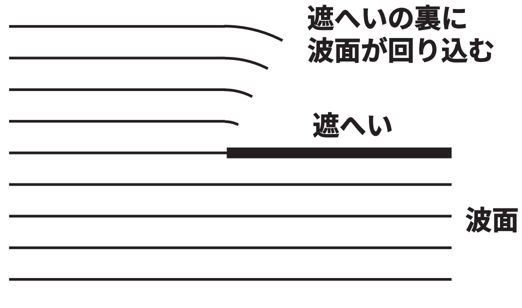

図２．回折

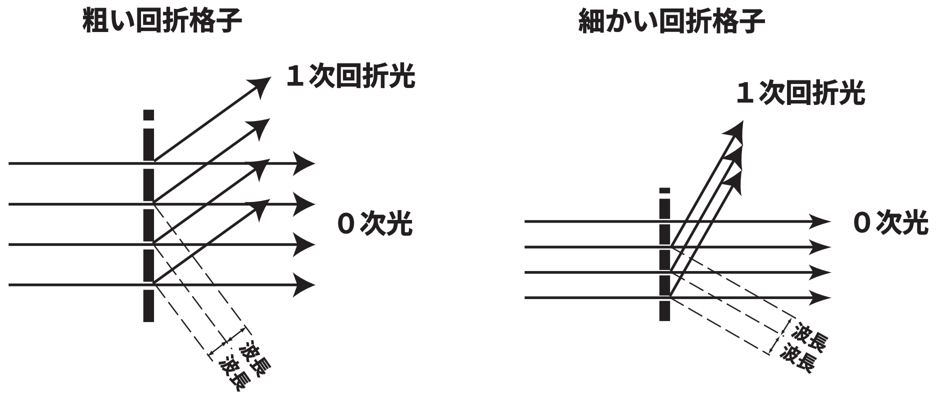

図３．回折格子と１次回折光

そこで，いま透明なフィルムに何か絵が描いてあって，これを背後から平行光で照明するとします．*) このとき，フィルム上の絵がたくさんの「正弦波状の明暗」，すなわちたくさんの回折格子の重ね合わせになっていると考えましょう．そうすると，各正弦波は回折格子としてはたらきます．各回折格子は入射光を回折し，各方向に１次回折光を出します．細かい周期の回折格子は大きい角度に，粗い周期の回折格子は小さい角度に１次回折光を出します．

結像レンズにこれらの光を通すと，各々の１次回折光はレンズによって曲げられ，像面で０次回折光と干渉します．この干渉により，像面には明暗の縞（干渉縞）が生じます．干渉縞は１次回折光の角度が大きいほど細かくなり，フィルム上の「正弦波状の明暗」が像面に再現されます．

空間周波数

さて，結像の過程をこのようにとらえると，フィルム上の絵は，どの程度の細かさの明暗の正弦波がどのくらいの振幅（明暗の変化の度合）で含まれているか，という観点でとらえることができます．この波の細かさのことを**空間周波数** (spatial frequency) といいます．空間周波数は明暗の細かさを表すものですから，「単位長さあたりの明暗の交代の回数」で定義されます．MKSA 単位系では単位は cycle/*m* となります．

ここで，各回折格子は平面上の波であることに注意しましょう．平面上の波には方向があります．そこで，空間周波数は x 方向の周波数 ν_x と y 方向の周波数 ν_y との２つの量の組で表されます．

このように考えたとき，フィルム上の絵はさまざまな空間周波数の波の組み合わせで表されるわけですが，このとき各空間周波数の波の振幅を**空間周波数成分**といいます．

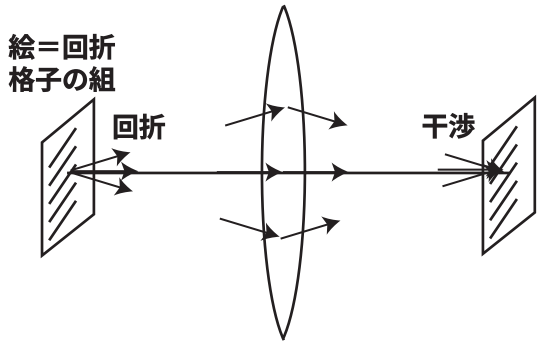

図４．回折と干渉による結像

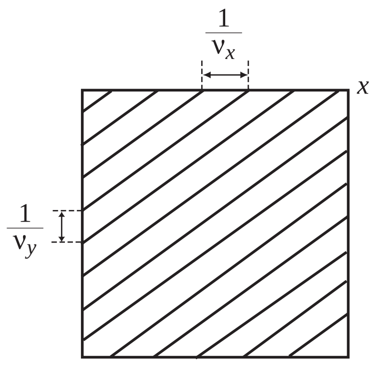

図５．空間周波数

*) 以下の説明はレーザーなどのコヒーレント光で照明した場合のもので，通常の光の場合はもう少し複雑です．

フーリエ変換

前節ではフィルム上の絵を空間周波数成分に分解できるとしたわけですが，果たしてそんなことができるのでしょうか？それを実際に行うのが**フーリエ変換** (Fourier transformation) です．

フーリエ変換の原理を，次のような考え方で見てみましょう．フィルム上の絵は，何らかの関数と考えることができます．ここからは，簡単のため，まず１次元の関数で考えます．この関数 $f(x)$ がさまざまな周波数の正弦波の重ね合わせでできているとします．周波数 ν_1 の正弦波を，指数関数を使って $\exp(i2\pi\nu_1 x)$ と表します．2π をかけているのは，ν_1 が「単位長さあたり何周期の波が入っているか」を表しているので，2π をかければ「単位長さあたり何ラジアン角度が進むか」をあらわすことができるからです．$2\pi\nu_1$ を角周波数 (angular frequency) ということもあります．

この指数関数には，つぎのような性質があります．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi\nu_1 x)\exp(-i2\pi\nu_2 x)dx = \delta(\nu_1 - \nu_2) \qquad (1)$$

(1) 式の右辺はデルタ関数とよばれるもので，

$$\delta(x) = 0\ (x \neq 0),\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad (2)$$

と定義されています．つまり，<u>同じ周波数の波を重ねて積分したときだけ何か値があって，異なる周波数の波を重ねて積分すると０</u>ということです．このような関数群を**直交関数系**（orthogonal function system) といいます．直交関数系についてはシリーズ２の画像圧縮のところで再び取り扱います．

さて，関数 $f(x)$ がさまざまな周波数の正弦波の重ね合わせでできているとすれば，次のように書くことができるはずです．

$$f(x) = a_1\exp(i2\pi\nu_1 x) + a_2\exp(i2\pi\nu_2 x) + \cdots + a_n\exp(i2\pi\nu_n x) + \cdots \qquad (3)$$

この関数に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx \qquad (4)$$

という計算をします．すると，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1\exp(i2\pi\nu_1 x)\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} a_2\exp(i2\pi\nu_2 x)\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx \\ &\quad + \cdots + \int_{-\infty}^{\infty} a_n\exp(i2\pi\nu_n x)\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx + \cdots\end{aligned} \qquad (5)$$

となり，(1) 式から，(5) 式の右辺は第１項は $a_1\delta(0)$ でその他の項は０となり，(5) 式の値は $a_1\delta(0)$ となります．これは，「高さが a_1 で幅が０のピーク」と考えてもよいでしょう．すなわち (4) 式の計算は，$f(x)$ から周波数 ν_1 の正弦波の振幅，すなわち周波数 ν_1 の成分を取り出す計算になります．

そこで，(4) 式の計算をさまざまな ν について行うと，それぞれの ν についての周波数成分が得られます．こうやって得られる成分を ν の関数と考えて，

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i2\pi\nu x)dx \tag{6}$$

とします．この計算がフーリエ変換で，(3) 式の関数にこの計算を行うと ν 軸上の $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n, ...$ の位置にそれぞれ高さ $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ のピークが立つことになります．２次元の場合は，

$$F(\nu_x, \nu_y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\exp\{-i2\pi(\nu_x x+\nu_y y)\}dxdy \tag{7}$$

となります．もとの画像の (x, y) 平面のほうを**実空間** (real domain) ，フーリエ変換した後の (ν_x, ν_y) 平面の方を**周波数空間** (frequency domain) といいます．

さて，元の関数が本当に (3) 式のように書けるか，ということですが，元の関数が周期関数の場合は，その周期の整数倍の周期の関数しか (3) 式の右辺には現れないはずですから，$\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n, ...$ は離散的になります．このときの (3) 式をフーリエ級数展開といいます．ところが，元の関数が周期関数でない場合は，元の周期が∞となりますからどのような周期の関数も (3) 式の右辺に現れることになり，$F(\nu)$ は周波数軸上の連続した位置のピークがつながった関数になります. また，(5) 式のように項別積分できるかについては，自明ではありませんが，とくにこの講義では触れないことにします.

波の位相とフーリエ変換

さきほどから「正弦波を指数関数で表す」と書いていますが，オイラーの式すなわち

$$\exp(i\omega)=\cos\omega+i\sin\omega \tag{8}$$

から，三角関数と指数関数に次の関係があることがわかります.

$$\cos\omega=\frac{\exp(i\omega)+\exp(-i\omega)}{2},\ \sin\omega=\frac{\exp(i\omega)-\exp(-i\omega)}{2i} \tag{9}$$

したがって，実空間の１つの正弦波 $a_1\cos2\pi\nu_1 x$ は，指数関数で表現すると

$$a_1\cos 2\pi\nu_1 x=\frac{a_1}{2}\exp(i2\pi\nu_1)+\frac{a_1}{2}\exp(i2\pi(-\nu_1)) \tag{10}$$

となりますから，フーリエ変換すると ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数に，高さ $a_1/2$ のピークが現れます．一方，θ だけ位相がずれた波を考えると，

$$\begin{aligned} a_1\cos(2\pi\nu_1 x+\theta) &= \frac{a_1}{2}\exp(i(2\pi\nu_1+\theta))+\frac{a_1}{2}\exp(-i(2\pi\nu_1+\theta)) \\ &= \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi\nu_1)\exp(i\theta)+\frac{a_1}{2}\exp(i2\pi(-\nu_1))\exp(-i\theta) \end{aligned} \tag{11}$$

です．この場合，ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数で取り出されるピークの係数は $\frac{a_1}{2}\exp(i\theta)$ および $\frac{a_1}{2}\exp(-i\theta)$ となります．(11) 式の場合，周波数空間で複素数の振幅と位相の軸をとると，振幅は (10) 式と同じで ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数に高さ $a_1/2$ のピークが現れますが，さらに位相について ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数に高さ θ のピークが現れます．つまり，波の位相のずれは周波数空間では複素数の位相として現れます.

今日の参考文献

貴家仁志，よくわかるディジタル画像処理，*CQ* 出版社 ISBN4-7898-3677-0

J.W.Goodman, Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill

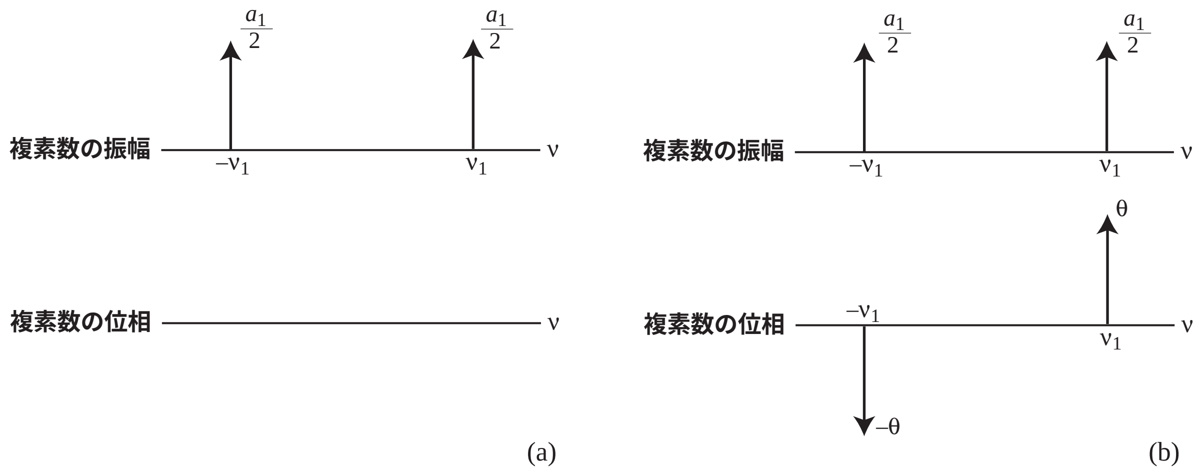

図６．波の位相の周波数空間での表現．(a) $a_1\cos 2\pi\nu_1 x$. **(b)** $a_1\cos(2\pi\nu_1 x + \theta)$.