数理科学特論Ａ～画像数学～　第７回

シリーズ３：モルフォロジー

(1) 画像の集合演算とモルフォロジー

「画像数学」の第３シリーズは，ここまでとは大きく違って，画像に写っている物体の「形状」を扱うモルフォロジー(mathematical morphology)について説明します．これは，画像中の物体の形状に影響する作用を簡単な集合演算に基づいて表現することで, 形状への作用の定量的な取り扱いを可能にするものです．このシリーズは, (1) 画像を集合として取り扱う考え方とモルフォロジーの基礎演算, (2) 物体の「大きさ」を定量的に取り扱う granulometry の概念, (3) 画像の変換を統一的に表すフィルタ定理／束(lattice)の概念とカラー画像のモルフォロジー，の３回に分けて講義します.

画像と集合

まず，簡単のために２値画像で考えます．２値画像で，黒い（画素値０の）画素が背景で，その中に白い（画素値１の）画素が集まってできた物体形状があると考えます．このとき，画像中の物体形状は「白い画素の集合」として扱うことができます.「画素の集合」というとき，画素を表すのはその画素がある「場所」を表すベクトルです．つまり，画像中の物体を，物体を構成する画素へのベクトルの集合として表すことができます.

モルフォロジーではこのように画像中の物体をベクトルの集合とし, $X, B, ...$のような大文字で表します．また，各画素の座標を表すベクトルを a, b などの小文字で表します．ベクトルの原点は，各集合について決めておきます.

ここで,「画素」という表現をしたので, 離散的な画像でなければ扱えないように感じるかもしれませんが, 実際には連続な形状でも扱いはかわりません. 集合を構成する集合が連続的な集合になるだけです.

Minkowski集合演算とモルフォロジーの基本演算

モルフォロジーでは，上のように画素の集合で表された物体形状に対して，これを「縮める」「膨らます」という２つの基本演算を定義して，これらを使って「形状」を定量的に扱う演算を導いてゆきます.

まず，次の演算を定義します.

$A_b \equiv \{a+b \mid a \in A\}$　集合 A のベクトル b による**移動** (**translation** of A by b)

$A^c \equiv \{\tilde{a} \mid \tilde{a} \notin A\}$　集合 A の**補集合** (**complement** of A)

画像中の物体 A に対して，A^c は「物体 A の背景」を意味しています．これらを使って，次の基本演算を定義します.

$A \oplus B \equiv \{a+b \mid a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} A_b$　集合 A と B の **Minkowski 集合和** (**Minkowski set addition** of A and B)

$A \ominus B \equiv \{x \mid x - b \in A, b \in B\} = \bigcap_{b \in B} A_b$　集合 A と B の **Minkowski 集合差** (**Minkowski set subtraction** of B from A)

上式の右辺についての証明：

$\Rightarrow$) $x \in A \ominus B \Rightarrow$ すべての$b \in B$ について$x - b \in A$，また$x - b \in A \Rightarrow x \in A_b$.

$\therefore x \in A \ominus B \Rightarrow$ すべての$b \in B$ について $x \in A_b \Rightarrow x \in \bigcap_{b \in B} A_b$.

$\Leftarrow$) 上の証明を逆にたどればよい.

上の関係は,

$A \ominus B$ =「***A*** を ***B*** の形に沿ってくまなく動かしたとき，
常に ***A*** の中に入っていた（一度も ***A*** から出なかった）部分」

$A \oplus B$ =「***A*** を ***B*** の形に沿ってくまなく動かしたとき，一度でも ***A*** の中に入った部分」

であることを示しています.

集合和と集合差の間には, $A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$ という関係があります. これを**双対性（duality）**といいます.

証明：$z \in (A^c \ominus B)^c \Leftrightarrow z \notin A^c \ominus B.$

$z \in A^c \ominus B \Leftrightarrow$ 全ての$b \in B$ について$z \in (A^c)_b$.

$\therefore z \notin A^c \ominus B \Leftrightarrow z \notin (A^c)_b$ をみたす$b \in B$ が存在する

$\Leftrightarrow z \in A_b$ をみたす$b \in B$ が存在する

$\Leftrightarrow z \in A \oplus B$.

集合和と集合差が双対であることは,「物体 A の集合差」と「背景 A^c の集合和」が，やはり物体と背景の関係にあることを示しています.

さらに，次のように集合の反転を定義します.

$B^s \equiv \{-b \mid b \in B\}$　　集合 B の**反転 (reflection** of B)

反転を使うと，集合差は$A \ominus B = \{x \mid (B^s)_x \subseteq A\}$ と表すこともできます.

証明：$B^s = \{-b \mid b \in B\} \Rightarrow (B^s)_x = \{-b + x \mid b \in B\} = \{x - b \mid b \in B\}$

集合差の定義から, $A \ominus B \equiv \{x \mid x - b \in A, b \in B\}$.

$\therefore A \ominus B = \{x \mid (B^s)_x \subseteq A\}$.

この関係は,

$A \ominus B$ =「***B***^{s} を ***A*** の内部に沿ってくまなく動かしたときの，***B***^{s} の中心の軌跡」

であることを示しています.

集合和と集合差，反転を使って，モルフォロジーの基本演算である **dilation** と **erosion** が次のように定義されます.

$A \oplus B^S = \bigcup_{b \in B} A_{-b}$　　集合 A の集合 B による **dilation** (**dilation** of A by B)

$A \ominus B^S = \bigcap_{b \in B} A_{-b} = \{x \mid B_x \subseteq A\}$　　集合 A の集合 B による **erosion** (**erosion** of A by B)

この定義と上の集合差の定義との関係からわかるように，A の B による erosion とは

$A \ominus B^S$ =「***B*** を ***A*** の内部に沿ってくまなく動かしたときの，***B*** の中心の軌跡」

であり，「***B*** によって ***A*** が削られる」ことを意味します．集合和・集合差と erosion・dilation の関係がややこしいですが，次ページ上の図１・次ページ下の表１のようにまとめてみました.

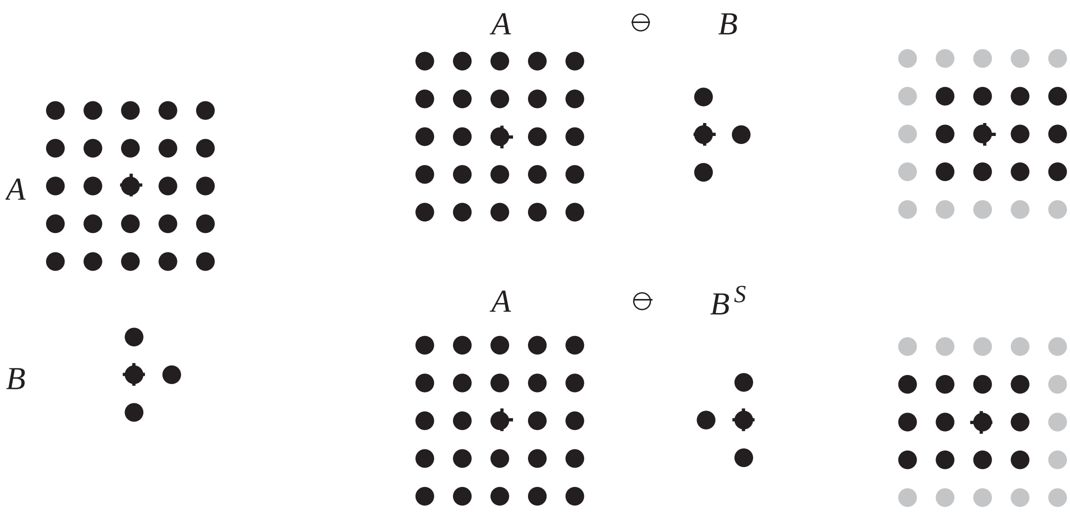

図１．集合差と **erosion** の違い（＋は原点を表す）．

次に，集合差・集合和と erosion・dilation を使って，**opening**・**closing** を定義します．

$A_B \equiv (A \ominus B^S) \oplus B$ 　　　　 A の B による **opening** (**opening** of A by B)

$A^B \equiv (A \oplus B^S) \ominus B$ 　　　　 A の B による **closing** (**closing** of A by B)

opening・closing には，モルフォロジーが真に意味するところが含まれています．それを次に見てみましょう． opening には, $A_B = \cup\{B_x \mid B_x \subseteq A\} = \bigcup_{B_x \subseteq A} B_x$ という関係が成り立ちます．

証明 :$A_B \equiv (A \ominus B^S) \oplus B = \bigcup_{x \in A \ominus B^S} B_x$ なので, $x \in A \ominus B^S \Leftrightarrow B_x \subseteq A$ を示せばよい．

(1) [$x \in A \ominus B^S \Rightarrow B_x \subseteq A$ を示す]

$b \in B \Leftrightarrow b + x \in B_x, -b \in B^S.$

$x \in A \ominus B^S \Rightarrow$ 全ての$(-b) \in B^S$ について, $x - (-b) = b + x \in A.$.

$\therefore\ x \in A \ominus B^S \Rightarrow B_x \subseteq A.$.

(2) [$B_x \subseteq A \Rightarrow x \in A \ominus B^S$ を示す]

$B_x \subseteq A \ \Rightarrow$ 全ての$b \in B$ について, $b + x \in A$

$\Rightarrow$ 全ての$(-b) \in B^S$ について, $x - (-b) \in A$

$\Rightarrow x \in A \ominus B^S$.

表１．集合差・集合和と erosion・dilation

集合差 $A \ominus B$	*erosion* $A \ominus B^S$	集合和 $A \oplus B$	*dilation* $A \oplus B^S$
AがBに沿って動く B^s がAの内部を動く	AがB^sに沿って動く BがAの内部を動く	AがBに沿って動く BがAの内部を動く	AがB^sに沿って動く B^sがAの内部を動く

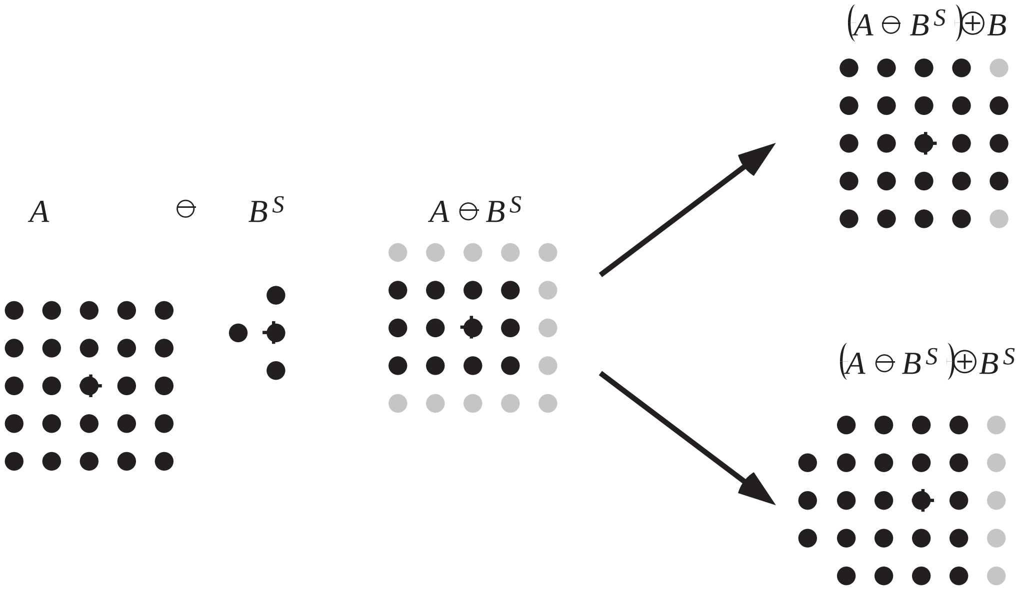

図２．オープニング（**erosion+dilation** とは異なる）

このことは,

A の ***B*** による **opening**

　　　　　　　　　=「***B*** が ***A*** の内部を動いたときの，***B*** そのものが描く軌跡」

　　　　　　　　　= 「***B*** という形の筆を ***A*** の内側から動かして，***A*** をできる限り正確に描いたもの」

を意味します．したがって,

A と $\boldsymbol{A_B}$ の差　　　=「***A*** のうち，細かすぎるために，***B*** という形の筆では

　　　　　　　　　　（筆が太すぎて）描き残されてしまった部分」

　　　　　　　　　=「***A*** のうち，***B*** よりも小さな成分」

を意味します．オープニングの例を図２に示します．この例でわかるように，オープニングは，第１段階の erosion で *A* の中に *B* を配置できる場所をさがし，その場所に第２段階の集合和で *B* を「貼り付ける」操作を行っています．また，opening は erosion+dilation とは違うこともわかります．

　opening と closing にも双対の関係，すなわち $A^B = [(A^c)_B]^c$ が成り立ちます．したがって,

A の ***B*** による **closing**　　=「***B*** という形の筆を ***A*** の外側から動かして，

　　　　　　　　　　　　A の背景をできる限り正確に描いたもの」

を意味します．したがって,

A と $\boldsymbol{A^B}$ の差　　　=「***A*** の背景のうち，細かすぎるために，***B*** という形の筆では

　　　　　　　　　　（筆が太すぎて）描き残されてしまった部分」

　　　　　　　　　　「***A*** の背景のうち，***B*** よりも小さな成分」

を意味します．これらが，モルフォロジーが「形を定量的に扱う」原理となります．

　ところで，ここで「筆」という表現をしました．ここまでは *A* と *B* はどちらも「集合」で対等でしたが，「*A* が *B* に沿って動く」「*B* が *A* の内部を動く」という表現からわかるように，通常モルフォロジーでは*A*を処理される対象の画像とし，*B*は*A*に比べて小さな集合を考え，これを**structuring element**

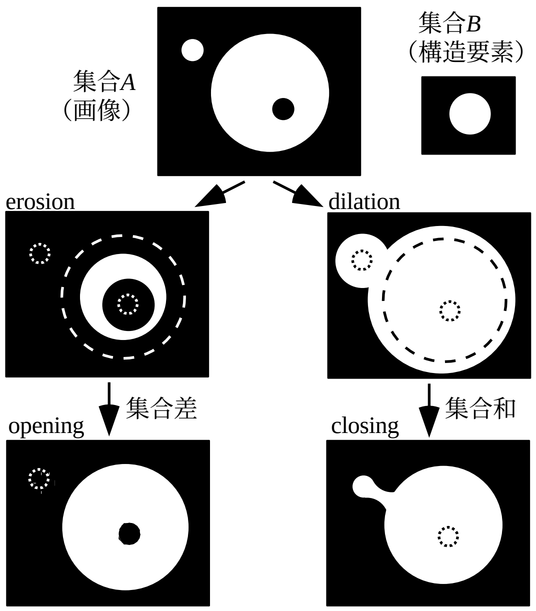

図３．モルフォロジーの基本演算

（構造要素，**SE**）とよびます．SE は画像に対する作用素と考えられます．以上４つがモルフォロジーの基本演算とよばれるものです．図３に例を示します．

多値（グレースケール）画像への拡張

　ここまでは２値画像の話に限定していましたが, 多値画像についても同じような演算を考えることができます．多値画像は，画素のもつ座標 $\boldsymbol{x}$ の値が $f(\boldsymbol{x})$であるような関数と考えます．このとき，

$$\left[f \ominus B^S\right](\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{x} \in B_x} f(\boldsymbol{x})$$ 多値画像 $f(\boldsymbol{x})$の構造要素 B による erosion

$$\left[f \oplus B^S\right](\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{x} \in B_x} f(\boldsymbol{x})$$ 多値画像 $f(\boldsymbol{x})$の構造要素 B による dilation

つまり，論理和・論理積が下限・上限（離散値ならば最小・最大）に置き替わっています．これは，ファジィ論理の考え方と同じです．

　さらに，構造要素も多値の場合，すなわち関数 $g(\boldsymbol{y})$と表される場合，多値ー多値のモルフォロジー演算は次のように定義されます（ただし G は $g(\boldsymbol{y})$の定義域(extent)）．

$$\left[f \oplus g^s\right](\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y} \in G}\left\{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + g(\boldsymbol{y})\right\}$$ 多値画像 $f(\boldsymbol{x})$の多値構造要素 $g(\boldsymbol{y})$による erosion

$$\left[f \ominus g^s\right](\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{y} \in G}\left\{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{y})\right\}$$ 多値画像 $f(\boldsymbol{x})$の多値構造要素 $g(\boldsymbol{y})$による dilation

---

今日の参考文献

小畑秀文，モルフォロジー，コロナ社(1996)．ISBN4-339-00664-5

P. Maragos, Tutorial on advances in morphological image processing and analysis, *Optical Engineering,* **26,** 623-632 (1987).

R. M. Haralick, S. R. Sternberg, and X. Zhuang, Image Analysis Using Mathematical Morphology, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **PAMI-9,** 532-550 (1987).