数理科学特論Ａ～画像数学～　第８回

シリーズ３：モルフォロジー

(2) Granulometry とスケルトン

モルフォロジーの第２回は，物体形状をかたち作る要素の「大きさ」を定量的に取り扱う granulometry と「サイズ分布」，それにスケルトンの概念について説明します．Granulometry は，画像中の物体に「どのような大きさのものがどのくらい」含まれているのかを表現するもので，モルフォロジーのもっとも本質的な部分です．それは，モルフォロジーの起源が，パリ国立高等鉱山学校の数学教授 G. Matheron と J. Serra によって考え出された，鉱石の劈開面の鉱物粒子の分析法にあるからです．鉱物粒子を分析するために粒子の形状・大きさを定量的に評価する必要が生じたことから，モルフォロジーの理論構築が始まりました．Matheron は他にも，いくつかのボーリングの結果から土中の資源の分布を推定する問題(kriging)の研究をはじめ，空間的に分布する量を統計的に取り扱う方法である空間統計学にも大きな貢献をしています．

サイズの定義

モルフォロジーにおける「サイズ」とは，ある基本図形（＝集合）とその相似拡大図形との倍率をいいます．例えば，直径が 1cm の円形を「サイズ１の円」とすると，直径 2cm の円は「サイズ２の円」となります．

より一般的には，ある図形 B に対して，倍率を r とするとき「r 倍の B」を，B が連続集合のとき

$$rB = \{rb \mid b \in B\} \tag{1}$$

と定義します．B をサイズ１の図形とするとき，rB のサイズは r となります．

しかし，離散画像の場合は，これではおかしなことになります．離散集合 B に対して(1)式のように $2B$ を定義すると，図１の中のように，すき間が空いてしまいます．そこで，離散画像の場合は Minkowski 集合和を使って

$$rB = B \oplus B \oplus \cdots \oplus B \quad ((r-1)\ times) \tag{2}$$

と定義します．こうすると図１の右のようにうまく定義できます．

ここで注意したいのは，図１下段の例の場合，B を見ると十字型のようですが，$2B$ を見るとわかる

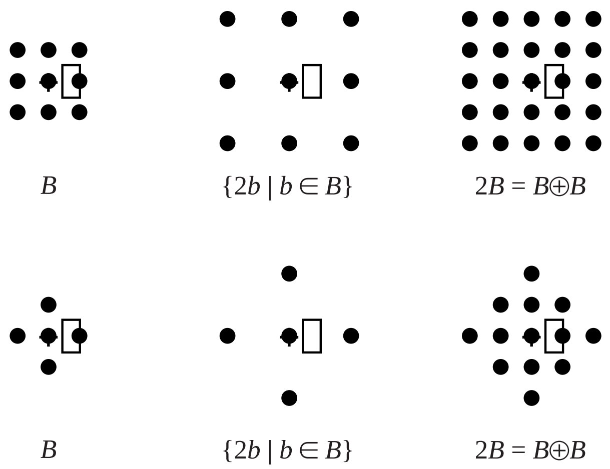

図１．離散画像の場合の，
サイズの定義

ように実はひし形であることです．これは，Bの画素数で表現できる図形には限界があり，「十字」はこの画素数では表現できないことを示しています．

---

granulometryとサイズ分布

前回の講義で，「画像Xの構造要素Bによる opening」とは「Xのうち，Bが大きすぎてはみ出してしまうような部分だけを取り除いたもの」，すなわち「Xから，Bよりも小さい成分を取り除いたもの」であることを説明しました．このようにopeningには，画像中の物体およびその各部分を「大きさ」によって選別する，一種のフィルタの働きがあります．

そこで，Bをある基本的な構造要素とし，これに対して$2B, 3B, \ldots$という，サイズを順に大きくした相似な構造要素を用意します．そして，各々のサイズの構造要素で各々openingを行い，$X_B, X_{2B}, X_{3B}, \ldots$という画像の系列を作ります．すると，この画像系列では，X_BはBよりも小さい成分が除かれており，X_{2B}はさらに$2B$より小さい成分が，X_{3B}はさらに$3B$より小さい成分が，. . . ，各々除かれていることになり，Xのうち小さい成分から順に除いた画像系列になっていることがわかります．この画像系列を granulometry といいます*)．

Granulometryの各画像$X_B, X_{2B}, X_{3B}, \ldots$について，その面積を求め，さらに各面積と元の画像$X$との比を求めます．ただし「画像の面積」とは，画像を構成する物体が占める面積（離散画像の場合は物体を構成する画素の数）を意味します．サイズに面積比を対応させた関数は，サイズ0の時面積比1で，単調減少な関数になります．これを**サイズ分布関数** (size distribution function) といいます．サイズ分布関数の，サイズnに対応する値は**「サイズ n 以上の部分の面積の割合」**を表します．

さらに，サイズ分布関数の微分を考えます．これは，granulometryの中の，隣接するサイズに対応する画像間の面積の差に相当します．例えば，X_{2B}とX_{3B}の面積の差を考えると，

「**X_{2B}に含まれX_{3B}に含まれない部分**」は
「**$2B$による openingでは除かれなかったが$3B$による openingでは除かれた部分**」
すなわち「**サイズがちょうど2である部分**」

の面積の割合となります．このようにして，各サイズに対応する部分の面積の割合を求めたものを**サイズ密度関数** (size density function) といいます．ここまででわかる通り，サイズ分布関数やサイズ密度関数は，それぞれ確率分布関数，確率密度関数と同じような性質をもつことがわかります．

式で書くと，画像Xの構造要素Bによるサイズ分布関数は，サイズをrとして

$$F_{X,B}(r) = \frac{A(X_{rB})}{A(X)} \tag{3}$$

となります．ただし，$A(\,)$は画像に対してその面積を表します．また，サイズ密度関数は連続の場合

$$p_{X,B}(r) = \frac{d}{dr}\left(1 - F_{X,B}(r)\right) = -\frac{1}{A(X)}\frac{dA(X_{rB})}{dr} \tag{4}$$

離散の場合は

$$\begin{aligned} p_{X,B}(r) &= \left(1 - F_{X,B}(r+1)\right) - \left(1 - F_{X,B}(r)\right) \\ &= \frac{1}{A(X)}\left(A(X_{rB}) - A(X_{(r+1)B})\right) \end{aligned} \tag{5}$$

と定義できます．これらは正のサイズに対する定義ですが，負のサイズに対しては，openingをサイズ

---

*)正確にはBが凸集合のときに限定されています．詳細は省略します．

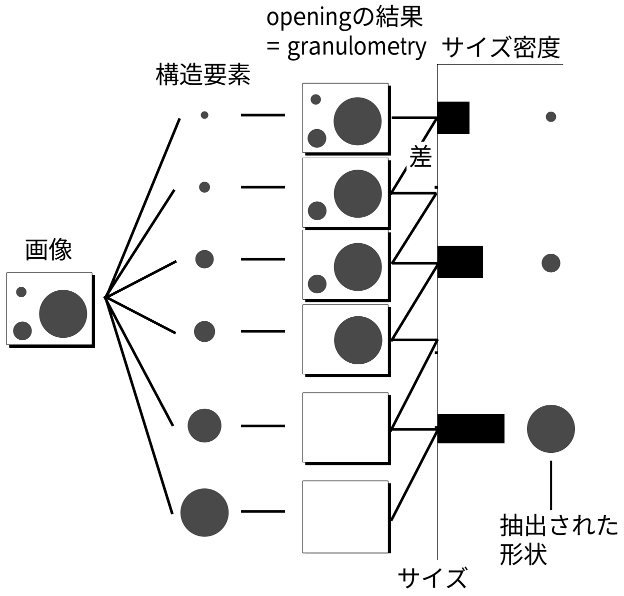

図２．granulometry とサイズ分布

の絶対値による closing に置き換えて定義します．opening と closing は双対(dual)な演算ですから，負のサイズに対するサイズ分布関数・サイズ密度関数は，画像の背景（物体以外の部分）について各サイズ（の絶対値）に対応する部分の面積を求めていることになります．図２に granulometry の計算の過程を示します.

サイズ密度関数の評価

サイズ密度関数を定義すると，確率密度関数の場合と同様に，次のような量を定義して画像を評価することができます．以下，離散の場合のみ示しますが，連続の場合も総和が積分になるだけです．また，N は画像 X に含まれる最大のサイズを表します.

・サイズの平均 (mean)

$$E(X, B) = \sum_{r=0}^{N} r p_{X,B}(r) \tag{6}$$

この値は画像 X の構造要素 B によるサイズの平均を意味します．平均はすなわち１次モーメントですが，２次モーメント（分散），さらに高次のモーメントも定義でき，これらによってサイズ密度関数を特徴づけることができます．これらのモーメントを granulometric moments といいます.

・サイズのエントロピー (entropy)

$$H(X, B) = -\sum_{r=0}^{N} p_{X,B}(r) \log p_{X,B}(r) \tag{7}$$

この値は，画像 X の構造要素 B に対する「平均粗さ(roughness)」を表します．$H(X, B) = 0$ のときは，X はひとつのサイズの B しか含まないことになり，粗さは最低です. $H(X, B) = \log (N+1) / (N+1)$ すなわちその最大値のときは，X は各サイズの B をまんべんなく含んでおり，最大の粗さということになります.

スケルトンと medial axis transform

スケルトン (skeleton) とは「骨格」の意味で，モルフォロジーでは画像中の物体を削り取って骨組みにすることをいいます. モルフォロジーにおけるスケルトンでは，スケルトンから逆に物体が再現できるという特徴があります.

物体をXとするとき，構造要素Bによるスケルトン$SK(X, B)$は次のように定義されます．

$$\begin{aligned} S_n(X, B) &= (X \ominus nB^S) - (X \ominus nB^S)_B \\ SK(X, B) &= \bigcup_n S_n(X, B) \end{aligned} \tag{8}$$

スケルトン$SK(X, B)$からは物体は再現できませんが，$S_n(X, B)$からは物体が再現できます．この$S_n(X, B)$を**スケルトン部分関数**といいます．また，物体中の各画素に，それを含むスケルトン部分関数のnの値を対応させたものを，medial axis transform といいます．スケルトン部分関数から，物体Xは次の計算で再現できます．

$$X = \bigcup_n \left[S_n(X, B) \oplus nB \right] \tag{9}$$

証明：

$$\begin{aligned} \left[S_n(X, B) \oplus nB \right] &= \left[(X \ominus nB^S) - (X \ominus nB^S)_B \right] \oplus nB \\ &= (X \ominus nB^S) \oplus nB - (X \ominus nB^S)_B \oplus nB \\ &= (X \ominus nB^S) \oplus nB - (X \ominus nB^S \ominus B^S \oplus B) \oplus nB \\ &= X \ominus nB^S \oplus nB - X \ominus (n+1)B^S \oplus (n+1)B \\ &= X_{nB} - X_{(n+1)B} \end{aligned} \tag{10}$$

となるので，

$$\begin{aligned} \bigcup_n \left[S_n(X, B) \oplus nB \right] &= \bigcup_n \left[X_{nB} - X_{(n+1)B} \right] \\ &= (X - X_B) \cup (X_B - X_{2B}) \cup (X_{2B} - X_{3B}) \cup \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

となります．$(A - B) \cup (B - C) = A - C$であり，$n$が十分大きいとき$X_{nB} = \emptyset$ですから，(11)式の右辺は$X$となります．

(8)式は，直観的にはどういう意味を表しているのでしょうか？$X \ominus nB^S$は「構造要素の相似形nBを物体の内部に敷き詰めたときの，nBの中心の軌跡」です．このとき，$(X \ominus nB^S) - (X \ominus nB^S)_B$は「$nB$のうち，物体の隅に（２辺以上に触れるように）配置したものの中心」になります（図３）．(8)式ではこの操作を小さなnから順に行っていき，nが大きくなってXの隅にきっちりと敷き詰められなくなったときはじめて$(X \ominus nB^S) - (X \ominus nB^S)_B$が空集合でなくなります．したがって，スケルトンとは，図４のように「nBを大きいものから順に，物体の隅に（２辺以上に触れるように）敷き詰めていったときの，nBの中心の軌跡」ということになります．

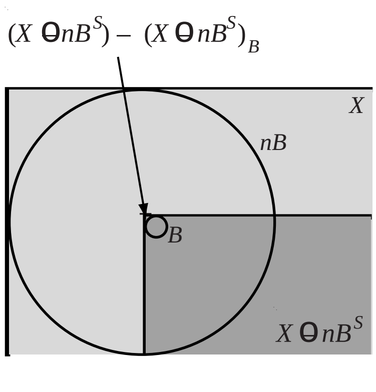

図３．(8)式の意味

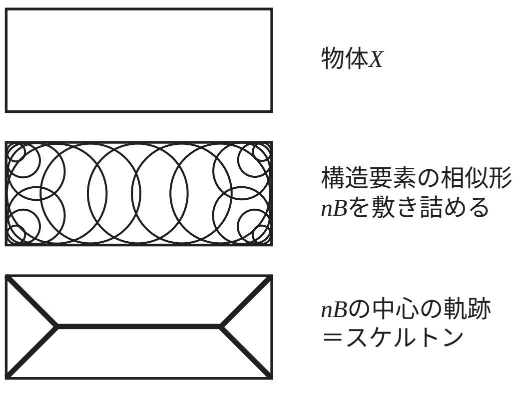

図４．スケルトンの導出