数理科学特論Ａ～画像数学～　第９回

シリーズ３：モルフォロジー

(3) フィルタ定理／モルフォロジーと順序集合

モルフォロジーの第３回は，モルフォロジーについての２つの話題を紹介します．１つめは**フィルタ定理**というもので，ある広い範囲の全ての画像フィルタがモルフォロジーの演算と論理演算で表現できる，という定理です．画像フィルタについては，次の第４シリーズで画像処理とニューラルネットワークの関係についてお話するときに再び説明します．

２つめは**順序集合**の概念とモルフォロジーについてです. 当初の２値画像についてのモルフォロジーでは，集合の論理演算(AND と OR）を基礎に演算が定義されました．グレースケール画像では，AND が最小値に，OR が最大値に拡張されました．さらに，カラー画像のモルフォロジーを考えるには，ベクトルについて最大・最小を定義する必要があります．その基礎となるのが順序集合と**束**(そく) (lattice) の概念です.

モルフォロジーにおける「フィルタ」

「フィルタ」とは，一般の用語では「何かを投入するとそれに一定の作用を及ぼして出力する装置」ということができます．例えば，水道水の浄化装置は「有害成分を取り除く」という作用を常時行い，この装置に汚れた水を投入するといつでも有害成分が除かれた水が出力される「フィルタ」です.

同様に「画像フィルタ」とは，画像を入力するとそれに一定のノイズを除去するなどの作用をおよぼした画像を出力するアルゴリズムです．モルフォロジーでは，さらに制約をもうけ，移動不変(translation-invariant)で増加的(increasing)なフィルタのみを扱い，単に「フィルタ」といえばこの条件が満たされているものとします.

ここで,「集合（画像）に対する作用 Ψ が移動不変である」とは,

$$\left[\Psi(X_b)\right]_{-b} = \Psi(X) \tag{1}$$

であることをいいます. 簡単にいえば,「画像中のどこで作用をおよぼしても, その作用の効果は変わらない」という意味です．また「作用 Ψ が増加的である」とは,

$$X \subset Y \Rightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y) \tag{2}$$

であることをいいます．すなわち，物体の包含関係が作用の前後で保たれることを意味しています.

例えば, ノイズ除去を行う画像フィルタを考えてみましょう. 画像中のある場所でノイズとみなされる物体は, 画像中のどこにあっても同様に除かれなければならないはずですから, フィルタが移動不変であることは自然なことです．また，増加的なフィルタは「小さい物体を除き，大きい物体を残す」作用のみを記述し,「大きい物体を除き，小さい物体を残す」という作用は記述できません．しかし，ノイズというのは通常「ノイズでない，意味のある」物体よりも小さいはずです．したがって，増加的なフィルタのみを考えるのも自然であることがわかります.

フィルタ定理

フィルタ定理 (filter theorem) とは，いかなる（モルフォロジーの意味での）フィルタもいくつかの erosion の論理和(OR)で表現できる，という定理です．すなわち，$\Psi(X)$ を画像 X に対するフィルタと

すると，いかなる $\Psi(X)$ についても

$$\Psi(X) = \bigcup_{A \in Ker[\Psi]} X \ominus A^s \tag{3}$$

がなりたつというものです．ここで集合族 $Ker[\Psi]$ はフィルタ Ψ の核(kernel)とよばれ，次のように定義されます（$\mathbf{0}$ は X の原点を示します）．

$$Ker[\Psi] = \{X \mid \mathbf{0} \in \Psi(X)\}\ . \tag{4}$$

また，次の関係がなりたちます．

$$Ker[\Psi_1] = Ker[\Psi_2] \Leftrightarrow \Psi_1 = \Psi_2 \tag{5}$$

$$\Psi(X) = \{x \mid X = B_x \text{ for } \exists B \in Ker[\Psi]\} \tag{6}$$

(5)式は，フィルタがその核によって一意に表現できることを示しています．また(6)式は核からフィルタがどのように再構成されるかを示しています．

(3)式の証明（概略） $x \in X \ominus A^S$, $A \in Ker[\Psi]$ とします．

[1] $x \in X \ominus A^S$ のとき，A_x は X の内部を埋め尽くします（図１）．

[2] Ψ が移動不変で, $A \in Ker[\Psi]$ だから, $x \in \Psi(A_x)$ です．

[3] Ψ は増加的ですから, [1]より, $x \in X \ominus A^S$ のとき $\Psi(A_x) \subset \Psi(X)$ です．

[4] [2][3]より, $x \in X \ominus A^S$ のとき $x \in \Psi(X)$ です．

A_x は X の内部を埋め尽くしているので, 上を逆にたどると, $x \in \Psi(X)$ のとき $x \in X \ominus A^S$ となる $A \in Ker[\Psi]$ が存在することがわかります．よって，すべての $A \in Ker[\Psi]$ についてすべての $x \in X \ominus A^S$ を集めると，$\Psi(X)$ が得られます．

(6)式の証明（概略） Ψ が移動不変で, $B \in Ker[\Psi]$ だから, $x \in \Psi(B_x)$ です．$X = B_x$ ですから, $x \in \Psi(X)$ となります. (6)式は，このような x を全て集めているので，これらの x で $\Psi(X)$ が再構成されます．

　核は一般的に冗長で, フィルタを構成するのに不要な要素を含んでいます. 核から $\Psi(X)$ の再構成に必要な最小の要素を抽出したものを基底(basis)といいます．

モルフォロジー演算によるフィルタの構成の例

　ここでは, 画像処理における代表的な移動不変・増加的フィルタであるメディアンフィルタ(median filter)，平均値フィルタ(average filter)が，モルフォロジーの演算でどう表現されるかを示します．こ

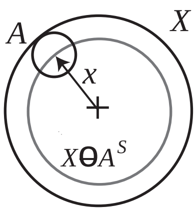

図１.(3)式における X と A_x の関係

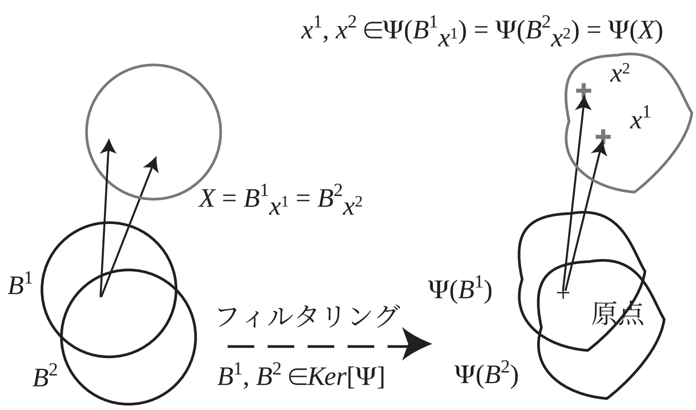

図２.(6)式の説明

れらのフィルタは，入力される画像の各画素について，その画素およびその近傍の画素値を使ってメディアン（中央値）あるいは平均値を計算し，その結果を出力される画像のその位置の画素値とします．移動不変なフィルタではこの近傍の形・大きさはどの画素においても同じで，これをウィンドウ(window)とよびます．ウィンドウは，モルフォロジーにおける構造要素に相当します．

n 画素の大きさのウィンドウをもつメディアンフィルタは，

「ウィンドウ内の画素から [n / 2 + 1] 個からなる画素の組合わせをすべてとりだしたときの，各組の最大値の組間の最小，あるいは各組の最小値の組間の最大」

と表されます．各々の「[n / 2 + 1] 個の画素からなる組での最大（最小）値を求める演算は，この組を構造要素とする集合和（集合差）となるので，メディアンフィルタがモルフォロジーの演算と論理演算で表されていることになります（図３，４）．

また，もっとも簡単な平均値フィルタである「２つの画素値 $f(x)$，$f(x+1)$の平均を求める演算」は，

$$0.5[f(x) + f(x+1)] = \sup_{r \in R} [\min\{f(x) - r,\ f(x+1) + r\}] \tag{7}$$

と，やはり最大・最小値演算で表されます（図５）．

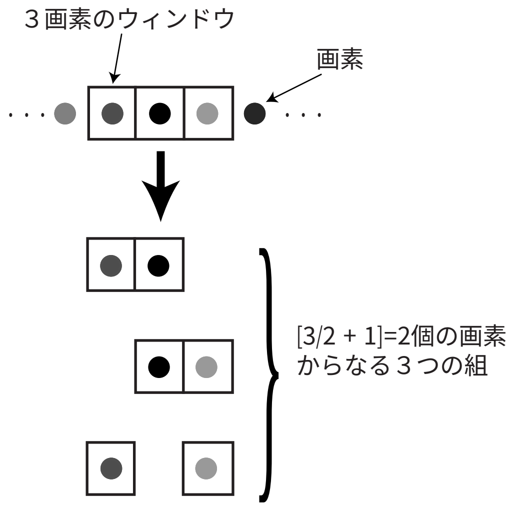

図３.[n/2+1]個からなる画素の組

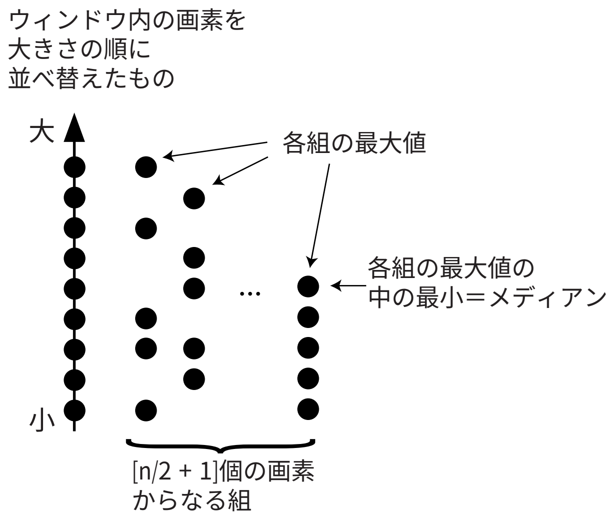

図４．最大・最小でメディアンを表す

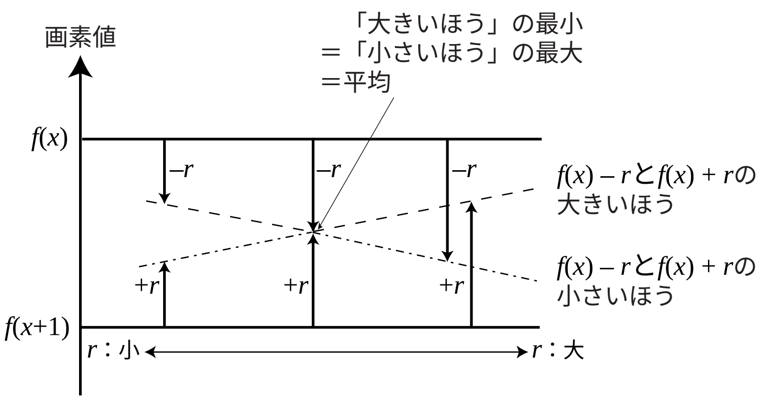

図５．最大・最小で平均を表す

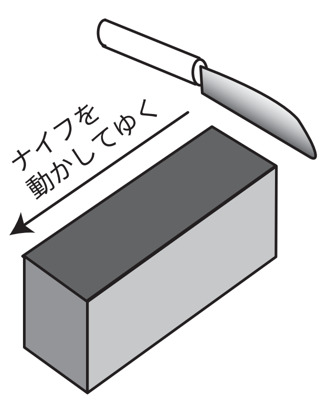

図６．ケーキを平等に分けるには

このようにして２つの値の平均を最大・最小で表すやり方は,「頭の体操」等にある「ケーキを平等に２等分する方法」と同じです．これは，棒状のケーキをＡ，Ｂの２人に分けるとき，どちらもより大きい分け前を求めているならば,

・Ａがナイフをケーキの端から少しずつ動かしてゆく（図６）.
・Ｂが，途中で「ストップ」の声をかける.
・そこでナイフを入れてケーキを２つに切り，Ａが２片のうち好きなほうをとる.

とすれば平等に分けられる，というものです．Ａは切断後の２片のうちの大きいほうをとるはずですから，Ｂは「大きいほうが最小」になるように「ストップ」をかけます．その結果，２片は同じ大きさに分けられます.

カラー画像と順序集合の概念

カラー画像の画素値は，例えばRGBなど，何らかの原色成分ごとの輝度を表す値を要素とするベクトル量になっています．そこで，カラー画像に対してモルフォロジーの演算を定義するには，ベクトル量に対して「最大値」や「最小値」を求める演算を定義しなければなりません.

ひとつの簡単な方法は, 各原色成分ごとに画像を分解して, 同一の構造要素を用いて別々にグレースケールのモルフォロジー演算を行うことです．しかしこの方法では, 画像中の同じ物体が, ある原色成分では取り除かれてある原色成分では取り除かれない，ということが起こるので，モルフォロジー演算によってある物体の色だけがかわるということがおこります．これは,「形を取り扱う」というモルフォロジーの考えからは外れたことです.

そこで，より洗練された手法として，ベクトル自体に「順序」を定義し，そのようなベクトルの集合（**順序集合**）の「最大ベクトル」「最小ベクトル」を定義する方法があります．グレースケール 画像のモルフォロジーの定義でみたように, 画素値間の最大・最小が定義できればモルフォロジーの演算は定義できます．そこで，画素がとりうる全てのベクトルの集合の，任意の部分集合に対して「最大」「最小」が定義できれば，これらのベクトルを画素値とするカラー画像のモルフォロジーの演算が定義できます．このような集合と「最大を求める」「最小を求める」という演算からなる代数系を**束** (lattice) といいます.

順序集合と束についての各定義

ある集合 X における関係 "≤" が次の３つの性質を満たすとき，"≤" を**順序関係** (ordering) あるいは**半順序関係** (partial ordering) といいます.

i) すべての $x \in X$ について，$x \le x$	反射律 (reflexivity)
ii) すべての $x, y \in X$ について，$x = y$ if $x \le y$ and $y \le x$	反対称律 (anti-symmetry)
iii) すべての $x, y, z \in X$ について，$x \le z$ if $x \le y$ and $y \le z$	推移律 (transitivity)

集合 X の要素のある組について順序関係が定義されているとき，X を**半順序集合** (semiordered set, partially ordered set, or poset) といいます．順序関係 "≤" について，$x \le y$ のとき x は y の**下位**であるといい，y は x の**上位**であるといいます*).

集合 X の要素の**すべての**組について順序関係が定義されているとき，X を**全順序集合** (totally ordered set) といいます. 全順序集合のすべての要素は, この順序関係によって１列に並べることができます.

---

*) 順序関係を表すのに記号 "≤" をよく用いますが，これは通常の意味での不等号とは関係ありません．「上位と下位」意味という表現も，「上位である」と定義された要素の方に開いた記号 "≤" を用いる，というだけの意味です.

例えば，整数の部分集合（グレースケールの画素値はこれにあたります）は順序関係≤（通常の意味の不等号）について全順序集合となっています.

順序集合 X の部分集合 A の要素 a について，
A の要素には a よりも上位の要素が a 以外にないとき（a と順序関係が定義されていない要素は A に存在してもよい），a は部分集合 A の**極大値** (maximal) といい，a よりも下位の要素が a 以外にないとき，a は部分集合 A の**極小値** (minimal) といいます.

さらに，a が部分集合 A の**すべての**要素よりも上位にあるとき，a は部分集合 A の**最大値** (maximum) といい，a が部分集合 A の**すべての**要素よりも下位にあるとき，a は部分集合 A の**最小値** (minimum) といいます.

「X の要素のうちで，部分集合 A のどの要素よりも上位［下位］にあるもの」の集合を A の**上界** (upper bound)［**下界** (lower bound)］といいます.

A の上界［下界］に最小値［最大値］があるとき，これを A の**上限** (supremum)［**下限** (infimum)］といいます．A の上限・下限は A の要素であるとは限らないことに注意してください．A の上限［下限］が A の要素であるとき，それは A の最大値［最小値］と同じです.

集合 X の，どの２要素の部分集合に対しても上限と下限が定義されていて，それらがつねに X の要素であるとき，集合 X・上限を求める演算・下限を求める演算からなる代数系を**束** (lattice) といいます.

図７は**ハッセ図** (Hasse diagram) とよばれるもので，集合の要素間で定義されている順序関係を表現したものです. (a)(b)(c)はいずれも束の例です. (a)は全順序集合で，ハッセ図は上下の一直線になります. (b)において，要素 c と要素 d の上限は c でも d でもなく b であることに注意してください．また, (c)は立方体の頂点に順序関係をつけて束を形成したものです.

カラー画像のモルフォロジーと束

上の説明から，カラー画素値を表すベクトルの間の順序関係を束が形成されるように定義すれば，上限と下限をORとANDのかわりに用いることによって, カラー画像のモルフォロジーの演算は定義可能であることがわかります. カラー画素値を表すベクトルの空間のとりかたは, RGBの他に輝度と色差信号で表すYIQ式などいくつかの方法があります．もっとも一般的な順序関係の作り方は，各成分からある比率で線形結合したものを用いるものです．しかし，この分野はまだ研究途上で，他にもさまざまな順序関係のつけかたがあります．また，モルフォロジーをより一般的に記述するため，画像よりもまず束を考え，モルフォロジーの演算をこの束の中での各種演算であるとして，モルフォロジーを体系づける方法もあります.

今日の参考文献

小倉久和，*情報の基礎離散数学,* 近代科学社，ISBN4-7649-0276-1 (1999).
H. J. A. M. Heijmans, *Morphological Image Operators,* Academic Press (1994).

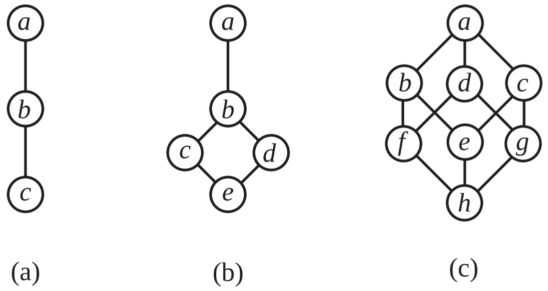

図７．束の例