数理科学特論Ａ～画像数学～　第１３回

シリーズ５：ＣＴスキャナー投影からの像復元

(1) Radon 変換と投影定理

早いものでこの講義も最後のシリーズになりました．最後のシリーズでは，ＣＴ (computed tomography)スキャナ，すなわち断層撮影装置を取り上げます．このシリーズでは, (1)投影を定式化する Radon 変換と投影定理, (2)投影からの物体像の再構成の手法, (3)ディジタル処理での再構成，の３回で，ＣＴスキャナの原理を説明します.

ＣＴスキャナとは

ＣＴスキャナとは, 物体の横からの透視像を周囲の各方向から撮影し，それらの像から物体の断面の像を再構成する装置です．透視像を撮影するには，Ｘ線透視撮影，あるいは核磁気共鳴(nuclear magnetic resonace, NMR)法*)などが用いられます．図１は最新の医療用Ｘ線 CT スキャナで，ほぼリアルタイムで再構成された断面像を得ることができ, また人体の周囲をらせん状にスキャンすることで立体像を再構成することもできます．さらに，手術台の周囲にスキャナ装置を配置して，断面像や立体像を見ながら手術ができる装置も開発されています．また，医療用以外に，金属でできた部品や食料品の内部を破壊せずに検査するための産業用ＣＴスキャナも実用になっています**).

ＣＴスキャナでは，透視像は図２のように撮影されます．実際には図２(b)のように点状のＸ線源から放射状にＸ線が出て，円周上に並んだ検出器で撮影します（ファンビーム方式）が，ここでは説明のため図２(a)のようにＸ線が平行に照射されるものと考えます．Ｘ線源, 検出器とも図の位置関係を保ったまま回転します．ですから，どちらの方法でも，物体の各点ですべての方向からのＸ線が通過することになります.

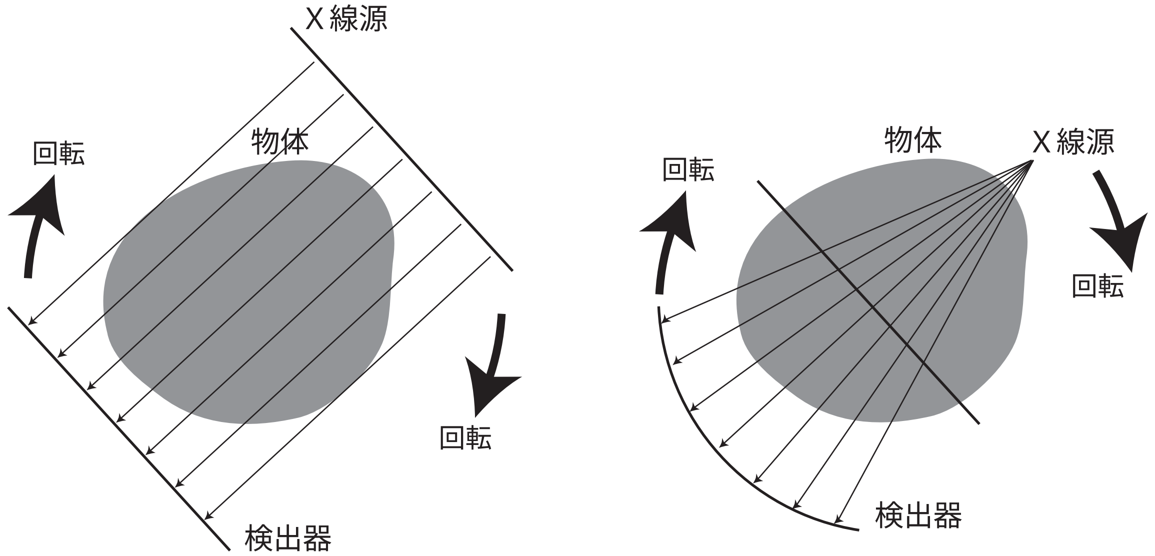
［教室で配付したプリントでは，`http://www.toshiba-medical.co.jp/products/ct/aquilion/`に掲載されているCTスキャナの写真を複製して掲載しました. 学外公開用の講義録では無断複製できませんので，この図は掲載しません. 上記URLをご参照ください．］

図１．最新の医療用ＣＴスキャナ（東芝メディカル・Aquilion）

---

*) この方法によるＣＴは NMR-CT とよばれていましたが,「核」という言葉が「核兵器」を連想させるため，これを避けて最近では MRI (magnetic resonace imaging)という名前が一般的になっています.

**) `http://www.toshiba-itc.com/cat/prod01.html`



(a)　　　　(b)

図２．ＣＴスキャナにおける透視像の撮影．(a) 平行照射．(b) ファンビーム．

さて，Ｘ線源と検出器がある位置関係にあるとき，検出器のある点に届くＸ線は，そのＸ線の経路上の各点で物体に吸収されて減衰します．したがって，検出器のある点に届いているＸ線量は，物体のもつ２次元の透過率分布を経路上で積分したものに比例します．ある位置関係の検出器上には，検出器上の各点からみてあるひとつの方向に透過率を積分したものに比例するＸ線量が届いています．

このように，ＣＴスキャナによる断面像の生成は，２次元に分布する透過率関数を各方向に積分して得られる１次元の関数の組から，もとの２次元の分布を再現する計算になります．このような積分を２次元分布の**投影**とよび，今扱う問題は**投影からの分布の再構成**となります．

Radon変換

投影からの像復元が可能であることを示したのは，Radon が示した次の定理です．

> ２次元の関数の任意の点の値は, その点を通過するあらゆる方向の直線に沿ったその関数の積分から，一意的に求まる．

前節で述べたスキャン操作によって，物体（の透過率分布）の各点について，その点を通る各方向の線上の積分が投影として得られます．したがって，この方法で得られた投影から物体が復元されるはずです．

２次元の物体と投影との関係を示すのがRadon変換です．これを示すために, 図３のような座標系を考えてください．θ 方向の軸 s 上に物体 $f(x, y)$を投影したものが関数 $g(s, \theta)$であるとします．$g(s, \theta)$は，法線ベクトルが θ 方向であるような直線に沿って積分することで得られます．このうち, (x, y)座標の原点を通る直線上を積分して得られた値を $g(0, \theta)$とします．

法線ベクトルが θ 方向で, (x, y)座標の原点を通る直線上の点は

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} \qquad (1)$$

を満たしますから,

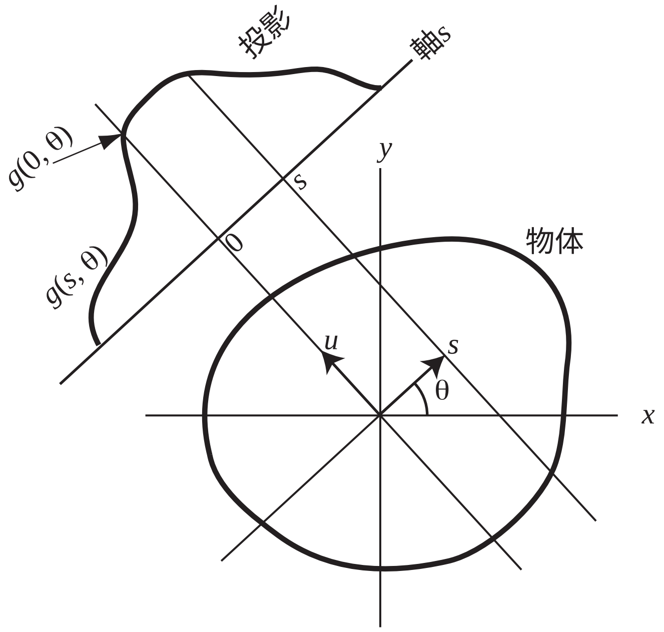


図３．Radon変換における座標系

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 0 \tag{2}$$

が得られます.「法線ベクトルが θ 方向で, (x, y)座標の原点を通る直線に沿って積分する」とは，$f(x, y)$のうち(2)式を満たす点の値だけを積分することですから，$g(0, \theta)$はデルタ関数を使って

$$g(0, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \delta(x\cos\theta + y\sin\theta)dxdy \tag{3}$$

と表すことができます．同様に,「法線ベクトルが θ 方向で，原点から s だけ離れた直線」は，原点を通る直線を x 方向に $s\cos\theta$，y 方向に $s\sin\theta$だけ移動したものですから, (2)式からこの直線は

$$(x - s\cos\theta)\cos\theta + (y - s\sin\theta)\sin\theta = 0 \tag{4}$$

すなわち

$$x\cos\theta + y\sin\theta - s = 0 \tag{5}$$

を満たします．したがって(3)式と同様に

$$g(s, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy \tag{6}$$

が得られます. (6)式を，２次元分布 $f(x, y)$から投影 $g(s, \theta)$への Radon 変換とよびます.

Ray-sum

Radon変換は投影をx, y平面での積分で表していますが, 投影は本来投影方向の線積分ですから，1 変数の積分で表されるほうが自然です．そこで, (6)式を１変数の積分で表してみましょう.

図３で投影方向に沿った(s, u)座標は, (x, y)座標を θ だけ回転したものですから，両者の関係は

$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{7}$$

と表されます．したがって，s, u と x, y は

$$\begin{cases} s = x\cos\theta + y\sin\theta \\ u = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} x = s\cos\theta - u\sin\theta \\ y = s\sin\theta + u\cos\theta \end{cases} \tag{9}$$

という関係で互いに変換されます. (9)式を(6)式に代入すると，デルタ関数の中身は

$$\begin{aligned} x\cos\theta + y\sin\theta - s &= (s\cos\theta - u\sin\theta)\cos\theta + (s\sin\theta + u\cos\theta)\sin\theta - s \\ &= s(\cos^2 + \sin^2\theta) - u\sin\theta\cos\theta + u\cos\theta\sin\theta - s \\ &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

となります．また, (x, y)座標から(s, u)座標への変換では，回転しただけで伸び縮みはしていませんから，$dxdy = dsdu$ です．よって(6)式は

$$g(s, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)\,\delta(0)\,dsdu \tag{11}$$

となります．デルタ関数は(6)式で s の関数でしたから,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(0)\,ds = 1 \tag{12}$$

がなりたち，これを用いると(6)式の Radon 変換 $g(s, \theta)$は直線上の積分，すなわち u による

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)\,du \tag{13}$$

という積分で表現されます．この式は，$f(x, y)$のうち「xy 座標の原点から s 隔たり，法線ベクトルが θ 方向」のＸ線によって貫かれる部分の合計を表しており，この意味で $g(s, \theta)$を ray-sum といいます.

投影定理

投影からの画像の再構成の問題は，結局 Radon 変換 $g(s, \theta)$が $0 \le \theta < \pi$（$0 \le \theta < 2\pi$ ではないことに注意）の各 θについて与えられているとき，それらから $f(x, y)$を求める問題，いわば逆 Radon 変換を求めることになります．この問題を解く重要な鍵が，次に述べる**投影定理**(projection theorem)です.

投影定理は,

> Radon 変換 $\boldsymbol{g(s, \theta)}$の s についての１次元フーリエ変換 $G_\theta(\xi)$と
> 物体 $\boldsymbol{f(x, y)}$の２次元フーリエ変換 $F(f_x, f_y)$の，原点を通り $f_x\,f_y$ 面に垂直で f_x 軸に対して角度 θをなす平面による断面は　等しい,

すなわち

$$G_\theta(\xi) = F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) \tag{14}$$

がなりたつ，というものです．この定理は，以下のように証明されます.

Radon 変換 $g(s, \theta)$の s についての１次元フーリエ変換 $G_\theta(\xi)$は

$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta)\exp(-i2\pi\xi s)\,ds \tag{15}$$

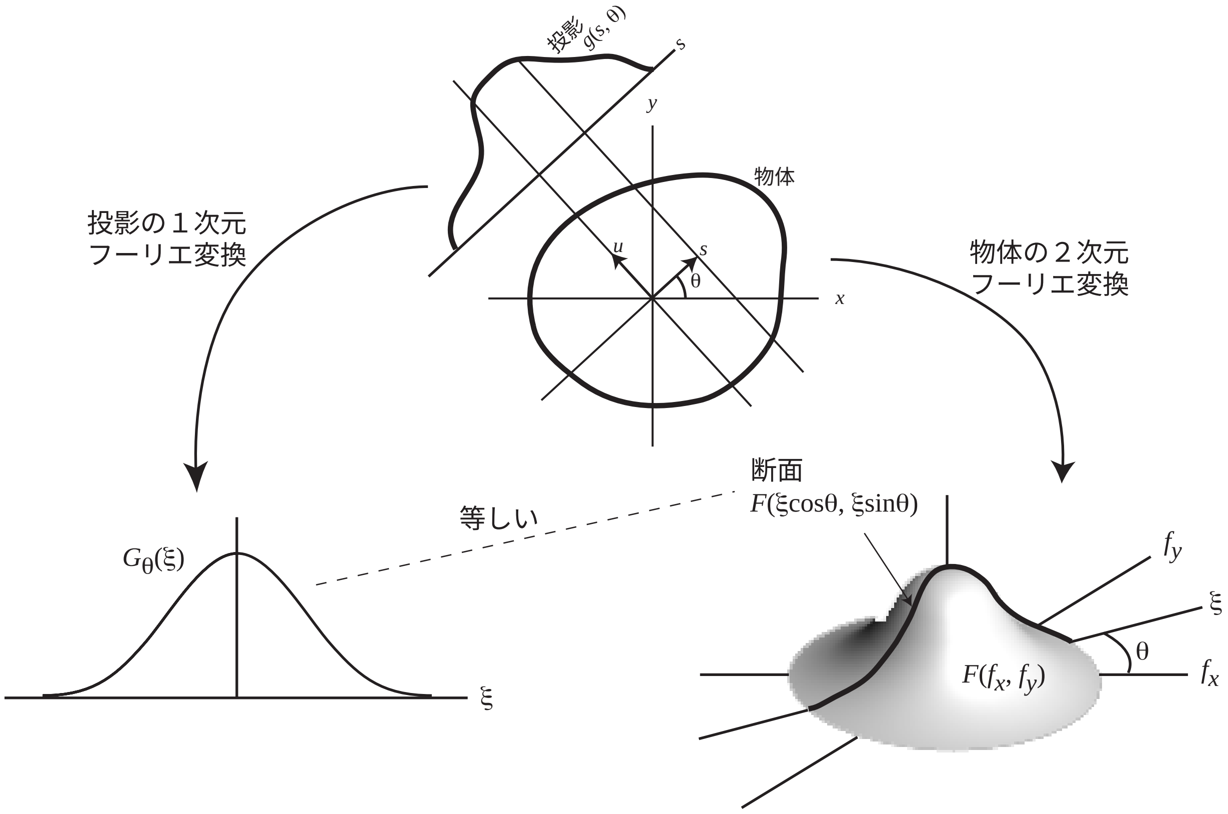


図４．投影定理

と表されます．これに ray-sum の定義である(13)式を代入すると

$$G_\theta(\xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)\exp(-i2\pi\xi s)dsdu \tag{16}$$

となります．これに(8)(9)式による(x, y)座標と(s, u)座標との変数変換を行うと，先に述べたように $dxdy = dsdu$ ですから，

$$\begin{aligned} G_\theta(\xi) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\exp(-i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))dxdy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\exp(-i2\pi\{(\xi\cos\theta)x + (\xi\sin\theta)y\}dxdy \\ &= F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) \end{aligned} \tag{17}$$

となります．次回は，この投影定理をもとに，再構成の方法を説明してゆきます．

参考文献

A. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processing（既出）
岩井喜典編，ＣＴスキャナ，コロナ社（1979，西図書館にて）