数理科学特論Ａ～画像数学～　第１５回（最終回）

シリーズ５：ＣＴスキャナー投影からの像復元

(3) ディジタル処理における再構成の計算

この講義も最終回となりました．今回は，前回説明した再構成の方法を実際に計算するのに生じる問題点を述べて，この講義を終わりにしたいと思います.

サンプリングの問題

前回説明したフィルタ補正逆投影法では,「各θについて, 投影を周波数空間において$|\xi|$倍するフィルタを適用しておいてから，逆投影」すれば物体$f(x, y)$が得られることを説明しました．つまり，θの方向の投影を$g(s, \theta)$とし，そのs方向のフーリエ変換を$G_\theta(\xi)$とするとき, $\hat{g}(s, \theta) = \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)$を$|\xi|G_\theta(\xi)$ の逆フーリエ変換，すなわち

$$\hat{g}(s, \theta) = \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi \qquad (1)$$

とすると,

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\, d\theta \qquad (2)$$

で元の画像が得られます.

ここまでの話では，どの変数も連続値をとるものとして考えていました．しかし，そんなことは現実には不可能です.「すべてのθについて投影する」ということも不可能で，実際にはある間隔で装置を回転させながら撮影することになります．また，Ｘ線検出器も，連続したＸ線量の分布を記録することはできず, ある一定間隔に並んだ検出器で, Ｘ線量の離散的な分布を検出することになります. このとき，投影のもつ最高の空間周波数をξ_{max}とすると，サンプリング定理により，検出器の間隔は$1 / (2\xi_{max})$以下でなければなりません.

フィルタ関数の実現

さて，問題は(1)式における「$|\xi|$倍するフィルタ」をどうやって実現するかです．このフィルタはξが大きくなるほど倍率（利得）が大きくなるわけですから，無限の空間周波数では利得が無限になります（図１(a)）．現実にはこのようなフィルタを作ることはできません.

そこで，有限の空間周波数の範囲で定義できるように，フィルタを工夫します．投影のもつ最大空間周波数ξ_{max}以上の周波数は無意味なので，フィルタでカットしてしまってもかまいません．そこで, 図1(b)のように, 関数$|\xi|$をξ_{max}で切断したものを考えます. これをRamachandran - Lakshminarayananフィルタ（Ram-Lak フィルタ）といい，フィルタ関数を$H(\xi)$で表すと

$$H(\xi) = |\xi|\, \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{max}}\right) \qquad (3)$$

と表されます.

Ram-Lak フィルタは，高周波数を強調する形になっているので，画像中のノイズを強調する傾向が

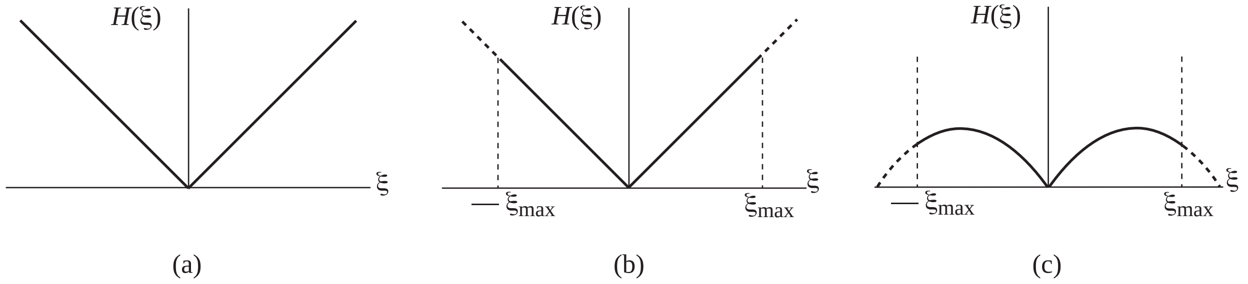

図１．種々のフィルタ関数．(a) オリジナルのフィルタ関数（$|\xi|$）．(b) Ram-Lakフィルタ．(c) Shepp-Loganフィルタ．

あります．その影響を抑えるため，高周波数での利得を抑えるように調整したフィルタがいろいろ提案されています．代表的なものが Shepp - Logan フィルタで，そのフィルタ関数 $H(\xi)$は図 1(c)のように表わされ，

$$H(\xi) = |\xi| \operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right) \tag{4}$$

となります．Ram-Lak フィルタに比べて，周波数空間で sinc 関数がかけ算された形になっています．これは実空間では rect 関数とコンヴォリューションを行っていることに相当するので，実空間で平均値フィルタリングをしていることに相当します．

補間と再構成

以上の状況で計算機による再構成を行う，すなわち直交座標の格子点(x, y)での物体（のＸ線吸収率）$f(x, y)$を求めるには，離散的な検出器で得られた投影にフィルタを適用した後，補間によって連続的なsに対して$\hat{g}(s, \theta)$ を求める必要があります. その手順を含めた再構成の手順を, コンヴォリューション逆投影法について見てみましょう．周波数空間で計算を行うフィルタ補正逆投影法でも，やりかたはほとんど同じです.

以下，Δsを検出器の間隔，Mを検出器の個数とします．また，$\Delta\theta$を投影する角度の間隔，Nを投影の個数とします．このとき$\Delta\theta = \pi / N$となります．また，周波数空間で定義されているフィルタ関数$H(\xi)$に対して，それを実空間にうつした関数を$h(s) = \mathrm{FT}^{-1}[H(\xi)]$ で表します.

［１］前回説明した，実空間でのコンヴォリューションによって$\hat{g}(s, \theta)$ を求める式（前回の(19)式）

$$\hat{g}(s, \theta) = g(s, \theta) * \mathrm{FT}^{-1}[|\xi|] \tag{5}$$

にしたがって, $\mathrm{FT}^{-1}[|\xi|]$ を$h(s) = \mathrm{FT}^{-1}[H(\xi)]$ に置き換えて

$$\hat{g}(s, \theta) = g(s, \theta) * h(s) \tag{6}$$

を求めます.

ここではs, θとも離散値になっていますから，

$$\begin{gathered} \hat{g}(m\Delta s, n\Delta\theta) = \Delta s \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} g(m\Delta s, n\Delta\theta)\, h((m-k)\Delta s) \\ -\frac{M}{2} \le m \le \frac{M}{2} - 1,\ 0 \le n \le N-1 \end{gathered} \tag{7}$$

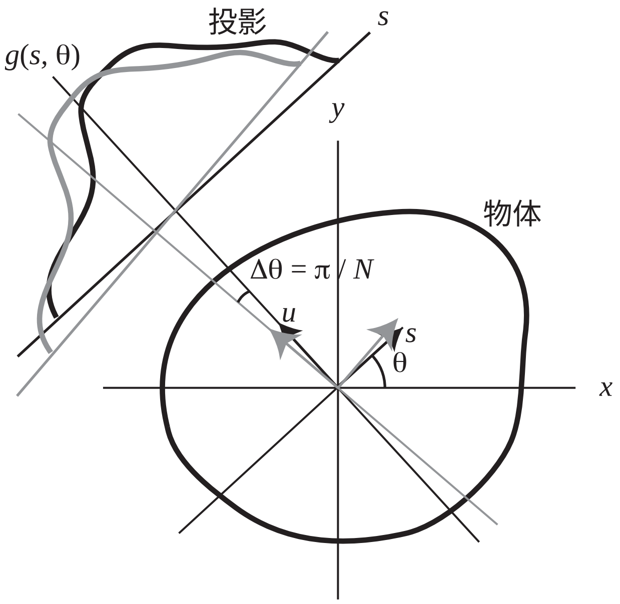

図２．実際の再構成における，
投影角度の刻み

で求められます（Σの前に Δs がかかっているのは，積分の式の ds に相当します）.

［２］離散的な s についての投影 $\hat{g}(m\Delta s, n\Delta\theta)$ から，連続的な s についての投影 $\hat{g}(s, n\Delta\theta)$ を求めるために，線形補間を行います．これは，$\hat{g}(m\Delta s, n\Delta\theta)$ と $\hat{g}((m+1)\Delta s, n\Delta\theta)$ の間を直線で補間するもので，

$$\begin{aligned} &\hat{g}(s, n\Delta\theta) = \hat{g}(m\Delta s, n\Delta\theta) + \left(\frac{s}{\Delta s} - m\right)[\hat{g}((m+1)\Delta s, n\Delta\theta) - \hat{g}(m\Delta s, n\Delta\theta)] \\ &m\Delta s \le s < (m+1)\Delta s \end{aligned} \tag{8}$$

で求められます.

［３］(8)式で得られた $\hat{g}(s, n\Delta\theta)$ から，物体（のＸ線吸収率）$f(x, y)$ を求めます．これも，逆投影の式（(2)式）を離散化して

$$f(x, y) \cong \Delta\theta \sum_{n=0}^{N-1} \hat{g}(x\cos n\Delta\theta + y\sin n\Delta\theta, n\Delta\theta) \tag{9}$$

で求められます.