数理科学特論Ａ～画像数学～

シリーズ１：画像のサンプリングとディジタル処理　レポート課題

［1］ $f(x)$ が実関数のとき，そのフーリエ変換の振幅（絶対値）は偶関数に，位相は奇関数になることを証明してください．

［2］ コンパクトディスク (CD) が普及しはじめたころ，「ディジタルオーディオは音の波をとびとびに取り出して，数字に変換して記録しているから，音の全てを記録していない」という批判がありました．この批判が的外れであることを説明してください．

［3］ ディジタルオーディオにおける「オーバーサンプリング」とは何か，各自で調べて，自分の言葉で説明してください．

解答例

[1]

$f(x)$ のフーリエ変換 $F(\nu)$ は

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i2\pi\nu x)dx \tag{1}$$

で表される．ここで

$$g_1(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(-2\pi\nu x)dx,\ g_2(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(-2\pi\nu x)dx \tag{2}$$

とおくと，$f(x)$ が実関数であるから $g_1(\nu)$，$g_2(\nu)$ はいずれも実関数で，さらに

$$\begin{aligned} g_1(-\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi\nu x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(-2\pi\nu x)dx = g_1(\nu) \\ g_2(-\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(-2\pi\nu x)dx = -g_2(\nu) \end{aligned} \tag{3}$$

であるから $g_1(\nu)$ は偶関数，$g_2(\nu)$ は奇関数となる．

さて，

$$\exp(-i2\pi\nu x) = \cos(-2\pi\nu x) + i\sin(-2\pi\nu x) \tag{4}$$

の関係があるので，(2)(4) 式を (1) 式に代入すると，$F(\nu)$ は

$$F(\nu) = g_1(\nu) + i\,g_2(\nu) \tag{5}$$

という複素数で表される．

このとき，$F(\nu)$ の振幅$|F(\nu)|$は

$$\begin{aligned} |F(\nu)| &= |g_1(\nu) + i\,g_2(\nu)| \\ &= \sqrt{(g_1(\nu))^2 + (g_2(\nu))^2} \end{aligned} \tag{6}$$

であり，$F(-\nu)$ の振幅$|F(-\nu)|$は

$$\begin{aligned} |F(-\nu)| &= |g_1(-\nu) + i\,g_2(-\nu)| \\ &= \sqrt{(g_1(\nu))^2 + (-g_2(\nu))^2} = |F(\nu)| \end{aligned} \tag{7}$$

であるから，$|F(\nu)|$は偶関数である．また，$F(\nu)$ の位相 $\arg F(\nu)$ は

$$\arg F(\nu) = \tan^{-1}\frac{g_2(\nu)}{g_1(\nu)} \tag{8}$$

であり，$F(-\nu)$ の位相 $\arg F(-\nu)$ は

$$
\begin{aligned}
\arg F(-\nu) &= \tan^{-1}\frac{g_2(-\nu)}{g_1(-\nu)} \\
&= \tan^{-1}\frac{-g_2(\nu)}{g_1(\nu)} = -\arg F(\nu)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

であるから，$\arg F(\nu)$ は奇関数である．

［2］

ディジタルオーディオは確かに記録する音の波をとびとびに取り出している．しかし，記録する音に含まれる最高の周波数がサンプリング周波数の 1/2 以下なら，サンプリングされた信号がもつ周波数分布から元の周波数分布だけを分離して取り出すことが可能である．したがって，「記録する音に含まれる最高の周波数がサンプリング周波数の 1/2 以下であるならば」という条件つきで，元の信号はサンプリングされても完全に記録されている．

［3］

サンプリング定理によれば，記録された音のもつ最高周波数が録音時のサンプリング周波数の 1/2 以下であれば，サンプリングされた信号の周波数分布から元の音の周波数分布だけを分離することができる．しかし，記録された音のもつ最高周波数がサンプリング周波数の 1/2 に近い値ならば，分離の際には，ある一定の幅の周波数帯域だけを完全に通しそれ以外を全く通さないようなアナログフィルタを用いなければならない．しかし，そのような急峻な特性のフィルタは実現できない．仮に近いものができたとしても，アナログフィルタによる高周波域の減衰はその帯域の信号の時間遅れを伴うので，元の信号に比べて位相が大きく歪んだ信号が出力されてしまう．

そこで，サンプリングされた信号の各サンプルの間を何らかの方法で補間し，見かけ上サンプリング周波数を高くすると，周波数空間での周波数分布の周期が大きくなり，間隔が広くなる．例えば各サンプルの間に１つずつサンプルを補間して，見かけ上のサンプリング周波数を２倍にすると，周波数空間では周波数分布の周期が２倍になる．こうすれば，さほど急峻でない特性のフィルタでも元の音の周波数分布だけを容易に分離することができる．これをオーバーサンプリングと言う．

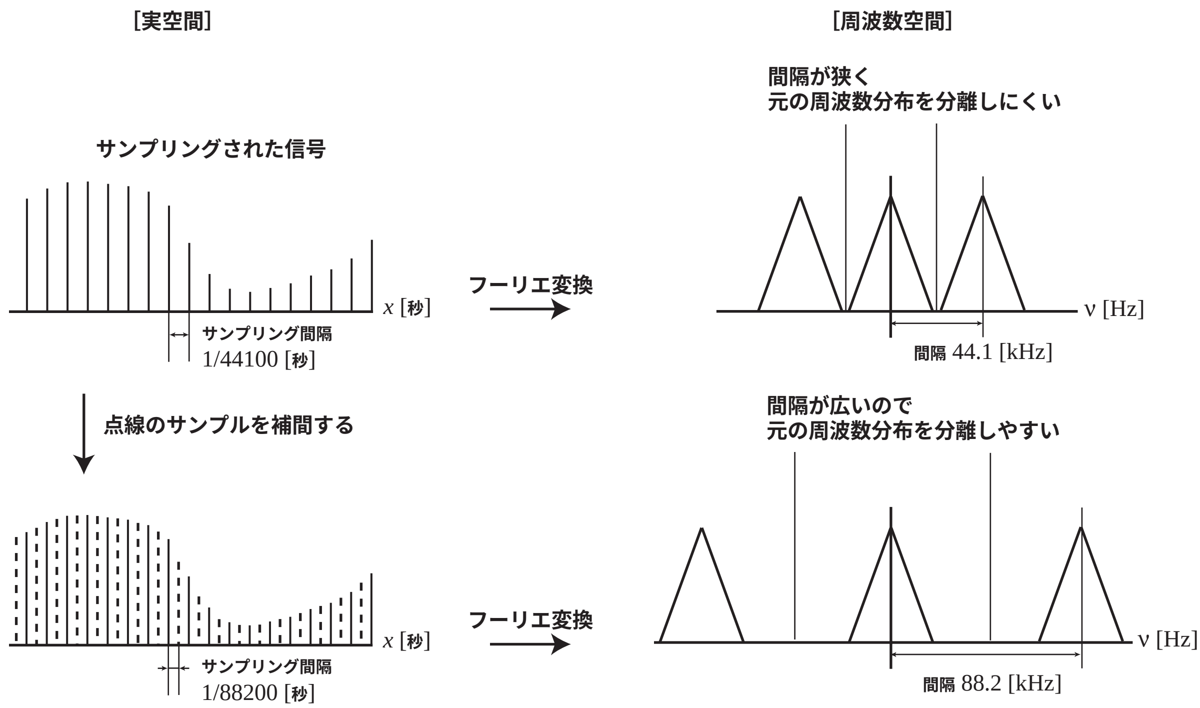

図１．オーバーサンプリング