2005年度後期　岡山理科大学総合情報学部　特別講義 IV　第1回

第1部・画像の形成とフーリエ変換／ 光による像の形成とフーリエ変換

第1部では，ディジタル画像の成り立ちについて説明します．画像は本来輝度が連続的に分布したものですが，コンピュータで取り扱うにはこれを離散的な画素の集まりに直し，さらに各画素の輝度を整数で表現する必要があります．離散的な画素を得ることをサンプリング (標本化，sampling) といい，輝度を整数で表現することを量子化 (quantization) といいます．サンプリングする際には，どのくらいの細かさでサンプリングするかが問題になり，「細かさ」を評価する必要があります．細かさを表すのに必要なのが**空間周波数**の考え方です．今回は，空間周波数と，それを求めるための計算である**フーリエ変換**について説明します．

光の回折と結像

まず,「画像の生成」という現象から考えてみましょう．画像を得るには，肉眼にしてもカメラにしても，レンズによる結像という現象が必要です．この現象は，物体の各点から四方八方に出た光が，レンズによって再び点に集められることです．これを別の観点から，次のように見ることができます．

光には**回折** (diffraction) という現象があります．回折とは，波が進路を遮られたときに，光が遮へいの裏側へ回り込むことです．例えば，水面の波を板で遮っても，波は板の裏側にまで達します．光は空間の電磁気的な歪みによって生じる波，すなわち電磁波の一種ですから，やはりこの現象を生じます．ラジオ電波は，放送局との間に障害物があっても，回折によって障害物の裏側に届きます．

さて，透過率が周期的に変化している物体，つまり格子状に明暗の帯が並んでいる物体－**回折格子**といいます－を光が通過すると，ある帯を通った光が隣の暗部の裏側に回り込みます．このとき，各帯を出た光はあちこちに散らばりますが，隣り合う帯を同時に出た光の波が，１波長分の長さだけずれて重なる方向では，各波の山と山が重なって強めあうので，この方向には強い光（**１次回折光**）が出ます．

図3のように，波長が同じであっても,「光の波が1波長分の長さだけずれて重なる方向」は，隣り合う帯の間隔によって変わります．回折格子の隣り合う帯の間隔が狭い，すなわち回折格子の明暗の周期が細かいと，１次回折光の方向と，入射光がそのまま通り抜けた光（**０次光**）とがなす角は大きくなります．

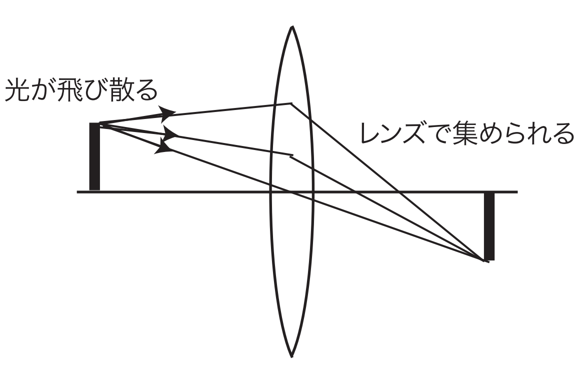

図 1: 結像

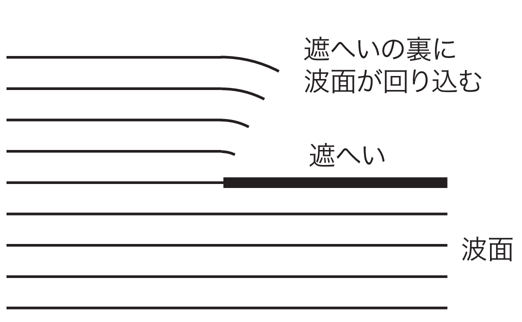

図 2: 回折

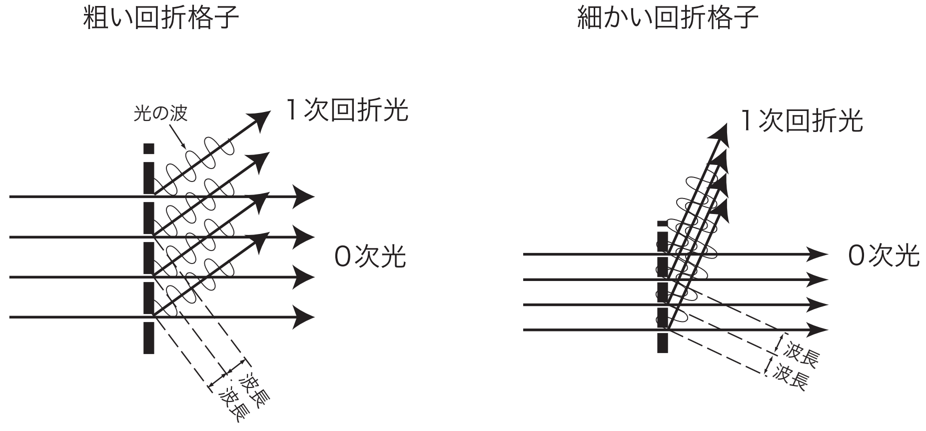

図 3: 回折格子と 1 次回折光.

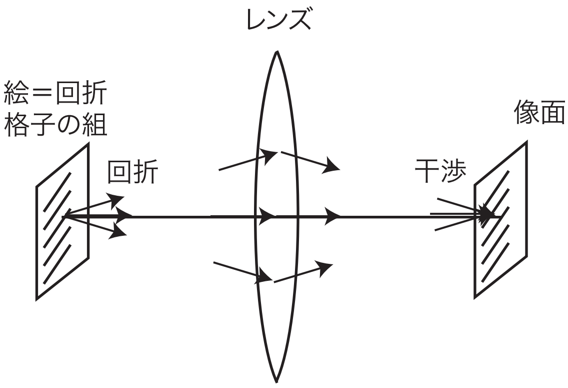

図 4: 回折と干渉による結像

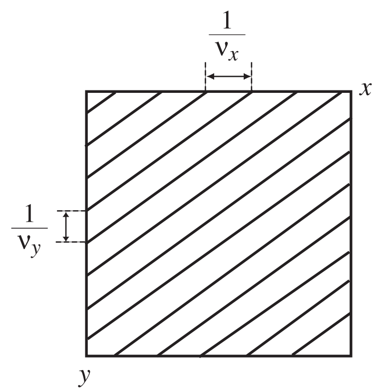

図 5: 空間周波数

明暗の波が黒（透過率 0%）と透明（透過率 100%）だけでできている場合は，回折光は 1 次回折光以外にいくつかの方向に現れますが，明暗の変化が正弦波状になっている場合は，１次回折光以外の回折光は打ち消し合い，１次回折光のみが現れることが知られています．

そこで，いま透明なフィルムに何か絵が描いてあって，これを背後から平行光で照明するとします[1]．このとき，フィルム上の絵がたくさんの「正弦波状の明暗」，すなわちたくさんの回折格子の重ね合わせになっていると考えましょう．そうすると，各正弦波は回折格子としてはたらきます．各回折格子は入射光を回折し，各方向に 1 次回折光を出します．細かい周期の回折格子は大きい角度に，粗い周期の回折格子は小さい角度に 1 次回折光を出します．結像レンズにこれらの光を通すと，各々の 1 次回折光はレンズによって曲げられ，像面で 0 次回折光と再び出会い，両方の光の波が重なりあいます．このとき，波の山と山が重なると強め合って明るくなり，山と谷が重なると弱め合って暗くなる**干渉** (interference) という現象をおこします．方向の異なる２つの光の波が重なり合うと，山と山が重なる部分と，山と谷が重なる部分が交互に繰り返し，像面には明暗の縞（干渉縞）が生じます．干渉縞は 1 次回折光の角度が大きいほど細かくなり，フィルム上の「正弦波状の明暗」が像面に再現されます．

[1]以下の説明はレーザーなどのコヒーレント光で照明した場合のもので，通常の光の場合はもう少し複雑です．

空間周波数

さて，結像の過程をこのようにとらえると，フィルム上の絵は，どの程度の細かさの明暗の正弦波がどのくらいの振幅（明暗の変化の度合）で含まれているか，という観点でとらえることができます．この波の細かさのことを**空間周波数** (spatial frequency) といいます．空間周波数は明暗の細かさを表すものですから，「単位長さあたりの明暗の交代の回数」で定義されます．MKSA 単位系では単位は cycle/m となります．

ここで，各回折格子は平面上の波であることに注意しましょう．平面上の波には方向があります．そこで，空間周波数は x 方向の周波数 ν_x と y 方向の周波数 ν_y との２つの量の組で表されます．

このように考えたとき，フィルム上の絵はさまざまな空間周波数の波の組み合わせで表されるわけですが，このとき各空間周波数の波の振幅を**空間周波数成分**といいます．

フーリエ変換

前節ではフィルム上の絵を空間周波数成分に分解できるとしたわけですが，果たしてそんなことができるのでしょうか？ それを実際に行うのが**フーリエ変換** (Fourier transformation) です．

フーリエ変換の原理を，次のような考え方で見てみましょう．フィルム上の絵は，何らかの関数と考えることができます．ここからは，簡単のため，まず 1 次元の関数で考えます．この関数 $f(x)$ がさまざまな周波数の正弦波の重ね合わせでできているとします．周波数 ν_1 の正弦波を，指数関数を使って $\exp(i2\pi\nu_1 x)$ と表します．2π をかけているのは，ν_1 が「単位長さあたり何周期の波が入っているか」を表しているので，2π をかければ「単位長さあたり何ラジアン角度が進むか」をあらわすことができるからです．$2\pi\nu_1$ を**角周波数** (angular frequency) ということもあります．

この指数関数には，つぎのような性質があります．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi\nu_1 x)\exp(-i2\pi\nu_2 x)dx = \delta(\nu_1 - \nu_2). \tag{1}$$

(1) 式の右辺は **Dirac のデルタ関数**とよばれるもので，

$$\delta(x) = 0 (x \neq 0), \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1 \tag{2}$$

と定義されています．つまり，「同じ周波数の波を重ねて積分したときだけ何か 0 でない値になって，異なる周波数の波を重ねて積分すると 0」ということです．このような性質をもつ関数のグループを**直交関数系** (orthogonal function system) といいます．直交関数系については第２部の画像圧縮のところで再び取り扱います．

さて，関数 $f(x)$ がさまざまな周波数の正弦波の重ね合わせでできているとすれば，次のように書くことができるはずです．

$$f(x) = a_1 \exp(i(2\pi\nu_1 x + \theta_1)) + a_2 \exp(i(2\pi\nu_2 x + \theta_2)) + \cdots + a_n \exp(i(2\pi\nu_n x + \theta_n)) + \cdots \tag{3}$$

ここで，$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ は各々の波の進行方向のずれを表すもので，波の位相といいます．(3) 式の関数に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx, \tag{4}$$

という計算をします．すると，

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} a_1 \exp(i(2\pi\nu_1 x + \theta_1))\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx \\
+ & \int_{-\infty}^{\infty} a_2 \exp(i(2\pi\nu_2 x + \theta_2))\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx \\
+ & \cdots + \int_{-\infty}^{\infty} a_n \exp(i(2\pi\nu_n x + \theta_n))\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx \\
+ & \cdots.
\end{aligned} \tag{5}$$

となり，(1) 式から，(5) 式の右辺は第 1 項は

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} a_1 \exp(i(2\pi\nu_1 x + \theta_1))\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} a_1 \exp(i\theta_1))\exp(i2\pi\nu_1 x)\exp(-i2\pi\nu_1 x)dx \\
= & a_1 \exp(i\theta_1)\delta(0)
\end{aligned} \tag{6}$$

でその他の項は 0 となります．ここで，虚数の部分は置いておいて実部のみに着目すると，(5) 式の値は $a_1\delta(0)$ となります．これは，「高さが a_1 で幅が 0 のピーク」と考えてもよいでしょう．すなわち，(4) 式の計算は，$f(x)$ から周波数 ν_1 の正弦波の振幅，すなわち周波数 ν_1 の成分を取り出す計算であるということになります．虚部のほうは，波の位相を表しています．

そこで，(4) 式の計算をさまざまな ν について行うと，それぞれの ν についての周波数成分が得られます．こうやって得られる各成分を ν の関数と考えて，

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i2\pi\nu x)dx. \tag{7}$$

とします．これがまさにフーリエ変換の計算で，(3) 式の関数にこの計算を行うと，ν 軸の $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ の位置の実部に，それぞれ高さ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ のピークが立つことになります．画像などの２次元の関数の場合は，

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\}dxdy. \tag{8}$$

となります．もとの画像の (x, y) 平面のほうを**実空間** (real domain)，フーリエ変換した後の (ν_x, ν_y) 平面の方を**周波数空間** (frequency domain) といいます．

さて，もとの関数 $f(x)$ は，本当に (3) 式のように「波の重ね合わせ」で書けるのでしょうか[2]．

そこで，元の関数が周期 L の周期関数である場合を考えましょう．すると，重ね合わされる各々の波も，いずれも周期 L で繰り返す波でなければならないはずです．したがって，(3) 式の右辺には，基本周期が $L/2, L/3, L/4, \ldots$ のように L の整数分の一である関数しか現れないはずです．これらの波は一般には無限にありますが，それぞれの基本周期はとびとび（離散的）ですから，これらの波の数はたとえ無限個であっても「数えることのできる無限個」（可算無限個）で，確かに (3) 式のような無限個の項の和（級数）で書くことができます．このときの (3) 式を**フーリエ級数展開**といいます．

一方，元の関数が周期関数でない場合はどうなるでしょうか．この場合は，L が無限大になったと考えることができます．L が無限に大きくなると，(3) 式の右辺にある波の基本周期 $L/2, L/3, L/4, \ldots$ のそ

[2]以下の説明は，数学的にはまったく厳密ではなく，直観に訴えたものです

れぞれの間隔はどんどん詰まってゆき，ついには隙間がなくなってしまいます．このことは，L が無限大のとき，これらの基本周期は離散的ではなく連続しており，数えられないので，(3) 式のような和の形では書けないことを意味しています．そこで，このときには，(7) 式で求められるフーリエ変換 $F(\nu)$ は，ピークの並んだものではなく，隣り合うピークがくっついた，連続な関数になると考えます．

指数関数と三角関数，正負の周波数

ここまでの説明で，指数が虚数の指数関数が波を表すものとしてきましたが，本来波を表すのは三角関数のはずです．それなのに指数関数を用いるのは，指数関数のほうが三角関数よりも計算が簡単だからです．この節では，三角関数と指数関数の関係を説明しておきます．

オイラーの式，すなわち

$$\exp(i\omega) = \cos\omega + i\sin\omega \tag{9}$$

から，三角関数と指数関数に次の関係があることがわかります．

$$\begin{aligned} \cos\omega &= \frac{\exp(i\omega) + exp(-i\omega)}{2} \\ \sin\omega &= \frac{\exp(i\omega) - exp(-i\omega)}{2i}. \end{aligned} \tag{10}$$

(9) 式から，実空間の 1 つの正弦波 $a_1 \cos 2\pi\nu_1 x$ は，指数関数で表現すると，

$$a_1 \cos 2\pi\nu_1 x = \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi\nu_1 x) + \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi(-\nu_1)x), \tag{11}$$

となります．したがって，この関数をフーリエ変換すると，ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数に，高さ $a_1/2$ のピークが現れます．つまり，**ひとつのコサイン関数で表される波は，フーリエ変換によって，正負の２つの周波数の組で表現される**ことがわかります．

ところで，周波数が同じで，θ だけ位相がずれた波を考えると，

$$\begin{aligned} & a_1 \cos(2\pi\nu_1 x + \theta) \\ = \; & \frac{a_1}{2}\exp(i(2\pi\nu_1 x + \theta)) \\ & + \frac{a_1}{2}\exp(-i(2\pi\nu_1 x + \theta)) \\ = \; & \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi\nu_1 x)\exp(i\theta) \\ & + \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi(-\nu_1)x)\exp(-i\theta) \end{aligned} \tag{12}$$

となります．この場合，ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数で取り出されるピークの係数は $\frac{a_1}{2}\exp(i\theta)$ および $\frac{a_1}{2}\exp(-i\theta)$ となります．(12) 式の場合，周波数空間で複素数の振幅と位相の軸をとると，振幅は (11) 式と同じで，ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数に高さ $a_1/2$ のピークが現れますが，さらに位相について，ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数に，高さ θ のピークが現れます．つまり，波の位相は，周波数空間では，複素数の位相として現れることがわかります．

参考文献

貴家仁志，よくわかるディジタル画像処理，CQ 出版社
ISBN4-7898-3677-0J.W.Goodman, *Introduction to Fourier Optics,* McGraw-Hill

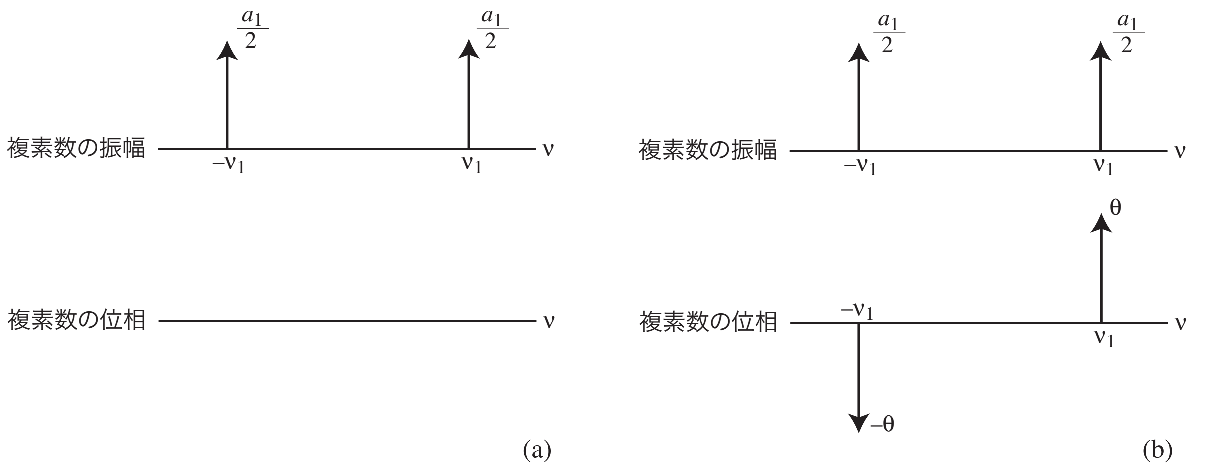

図 6: 波の位相の周波数空間での表現．(a) $a_1 \cos 2\pi\nu_1 x$. (b) $a_1 \cos(2\pi\nu_1 x + \theta)$.