第１部・画像の形成とフーリエ変換／ サンプリング定理と離散フーリエ変換

連続的な明度分布からディジタル画像を生成するためには，連続的な明度分布から一定間隔で明度を取り出す作業を行う必要があります．これをサンプリングといいます．このとき，間隔をある程度より細かくすれば，サンプリングされた画像から元の連続的な明度分布を再現することができます．この最小限の細かさを与えるのがサンプリング定理です．また，サンプリングされたディジタル画像についてフーリエ変換を定義したのが離散フーリエ変換で，計算機でフーリエ変換を行うのにはこの方法が用いられます．第２講の話題は，これら「サンプリング定理」と「離散フーリエ変換」です．

サンプリングとサンプリング定理

今回は，簡単のため画像を１次元の関数として考えます．画像中の位置 x に対して，その位置の明度が関数 $f(x)$ で与えられているとします．この画像をディジタル画像として取り扱うためには，一定の周期 T で明度を測る必要があります．この操作をサンプリング（sampling, 離散化）といいます（図 1）.

ここで，デルタ関数が周期 T の間隔で無限に並んだ関数を考えます（図 2）．これをくし形関数 (comb function) といい，

$$\mathrm{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) \tag{1}$$

と表されます．くし形関数を使うと，サンプリングされたディジタル画像 $f_T(x)$ は，連続関数 $f(x)$ にくし形関数 $\mathrm{comb}_T(x)$ をかけたもの，すなわち，

$$f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x). \tag{2}$$

と表されます．

さて，サンプリングされた画像 $f_T(x)$ がとる空間周波数の範囲を調べるため，$f_T(x)$ のフーリエ変換がどうなるかを調べてみましょう．ここで，２つの関数の積のフーリエ変換についての次のような定理を用います．

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu) \tag{3}$$

ここで，$FT[f(x)]$ は関数 $f(x)$ のフーリエ変換を表します．また，記号「$*$」はコンヴォリューション（convolution, 畳み込み積分）という演算で，

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy \tag{4}$$

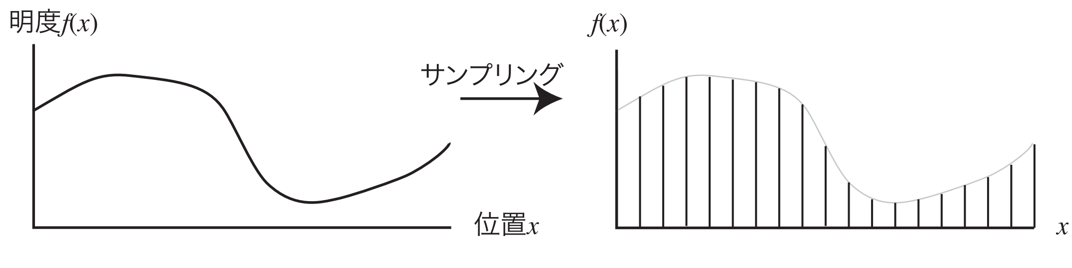

図 1: サンプリング

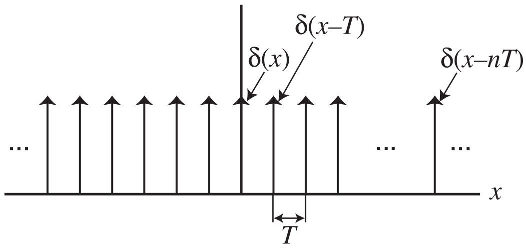

図 2: くし形関数

と定義されます．つまり，かけ算のフーリエ変換は，フーリエ変換のコンヴォリューションとなります (証明は付録 1 を見てください)．

これを使って (2) 式のフーリエ変換を求めると，

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) \tag{5}$$

となります．この式の右辺第 1 項は，元の関数 $f(x)$ のフーリエ変換です．第 2 項はくし形関数のフーリエ変換ですが，実は

$$FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\mathrm{comb}_{1/T}(\nu) \tag{6}$$

となります（証明の概略は付録 2 を見てください)．つまり，くし形関数のフーリエ変換はくし形関数で，また，もとのくし形関数の周期と周波数空間でのくし形関数の周期は，反比例することがわかります．したがって，

$$FT[f_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\{FT[f(x)](\nu) * \mathrm{comb}_{1/T}(\nu)\} \tag{7}$$

となります．　さて，「くし形関数とのコンヴォリューション」とは何でしょうか？ これを考えるため，まず「デルタ関数とのコンヴォリューション」を考えてみましょう．(4) 式から，

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-y)dy \tag{8}$$

となります．(8) 式の右辺では y が $-\infty$ から ∞ まで動くわけですが，$t = y$ のとき以外は $\delta(t-y) = 0$ ですから，$f(y)\delta(t-y)$ の積分への寄与は 0 です．よって，

$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-t)dy \\ &= f(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(0)dy = f(t) \end{aligned} \tag{9}$$

となり，ある関数とデルタ関数とのコンヴォリューションは，その関数自身になります．

くし形関数はデルタ関数が一定間隔で並んだものですから,「ある関数とくし形関数とのコンヴォリューションは，ある関数全体が一定間隔で並んだもの」になります．したがって，(7) 式は，元の明度分布 $f(x)$ を周期 T でサンプリングした $f_T(x)$ をフーリエ変換すると，元の明度分布 $f(x)$ をフーリエ変換した $FT[f(x)]$ が周期 $1/T$ で無限に並んだものになることを意味しています．これを図で表したものが図 3 です．ここで ν_c はカットオフ周波数 (cutoff frequency) とよばれ，元の明度分布 $f(x)$ がもつ最大の周波数

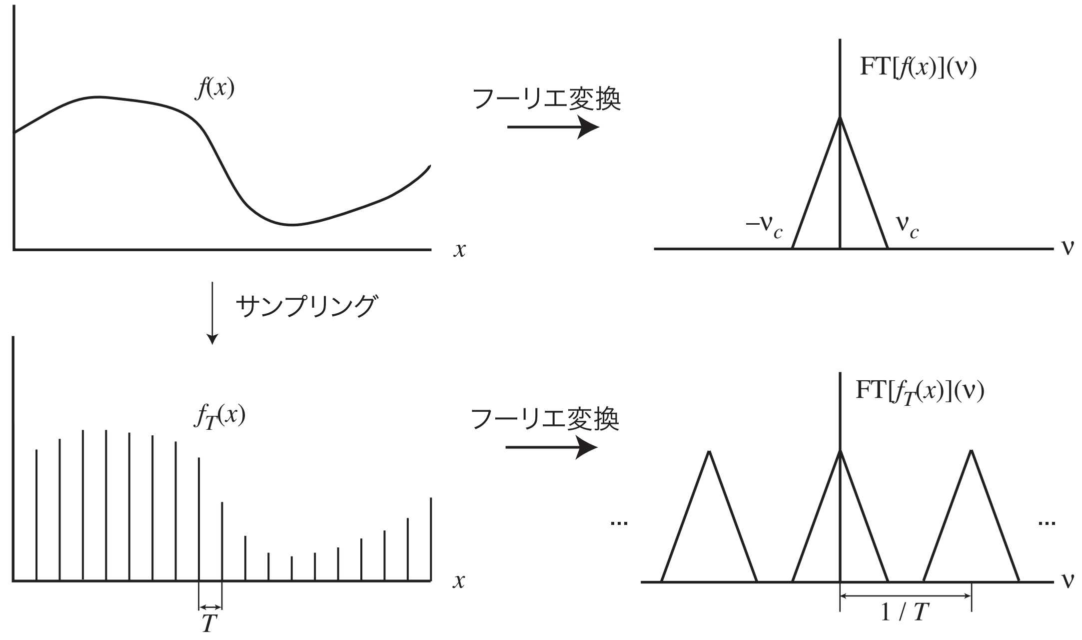

図 3: サンプリングとフーリエ変換

を意味します．$f(x)$ が実関数の場合，周波数 ν でフーリエ変換 $FT[f(x)]$ が 0 でないときには，周波数 $-\nu$ でもフーリエ変換は 0 でない[1]ので，$FT[f(x)]$ の成分は $-\nu_c$ から ν_c の範囲に存在します．

さて，図 4(a) のように，周波数空間でくし形関数の間隔が十分広い場合は，隣りあう $FT[f(x)]$ どうしは重なりません．そこで，サンプリングされた $f_T(x)$ をフーリエ変換した $FT[f_T(x)]$ から，周波数空間で幅 $1/T$ の部分を切り出すと，元の関数のフーリエ変換が取り出されます．すなわち，画像でいえば，もとの画像の明度分布の情報はサンプリングによって失われないことがわかります．これに対して，図 4(b) のように周波数空間でくし形関数の間隔が狭い場合は，隣りあう $FT[f(x)]$ どうしが重なってしまい，周波数空間で幅 $1/T$ の部分を取り出しても元の画像の明度分布のフーリエ変換をとりだすことはできず，誤った関数をとりだしてしまいます．この現象をエイリアジング（aliasing, 異名効果）といいます．

元の $FT[f(x)]$ は $-\nu_c$ から ν_c の範囲に存在しますから，図 4(a) のように隣りあう $FT[f(x)]$ 同士が重ならないようにするには，間隔 $1/T$ が $2\nu_c$ 以上であればよいことになります．T はサンプリングの間隔ですから，$1/T$ は単位長さあたりのサンプリングの回数，すなわちサンプリングの細かさを表します．つまり，元の明度分布のもつ最大の周波数の２倍より細かくサンプリングすれば，元の明度分布をサンプリングされたディジタル画像から再現できることがわかります．これをサンプリング定理 (sampling theorem) といいます．

身近な例でいえば，（空間周波数ではなく時間周波数の話になりますが）音楽用コンパクトディスク (CD) ではサンプリング周波数は 44.1kHz で，すなわち毎秒 44100 回の細かさでサンプリングを行っています．したがって，音楽 CD で再生できる最高の周波数は 22.05kHz です．ですから，音源をサンプリングする前に，22.05kHz 以上の周波数の音が入らないようにフィルタリングをしておかないと，再生のさいエイリアジングを起こしてしまいます．

[1] $f(x)$ が実関数のとき，そのフーリエ変換の振幅（絶対値）は偶関数に，位相は奇関数になります．

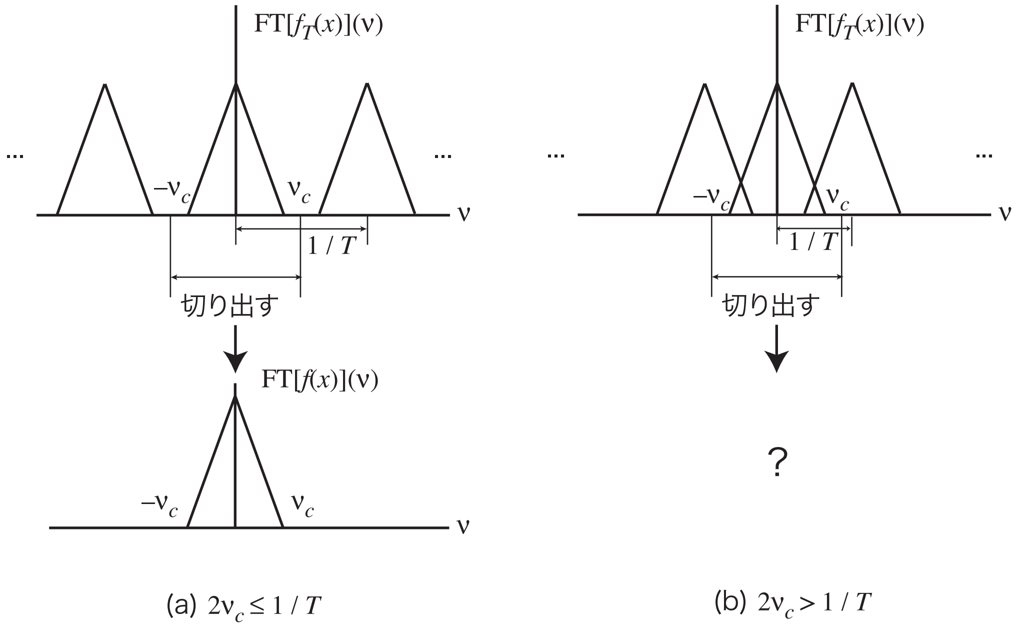

図 4: サンプリング定理

離散フーリエ変換

数学というのはだいたい連続な関数を扱うほうが簡単な場合が多いですが，コンピュータで扱える計算は離散的なものだけです．そこで，前節のサンプリングによって離散化された関数のフーリエ変換を，離散的に計算する方法について考えてみましょう．

元の連続な明度分布 $f(x)$ を間隔 T でサンプリングした画像 $f_T(x)$ は (2) 式のように表されますから，そのフーリエ変換は第 1 講で説明した定義により

$$\begin{aligned} & FT[f_T(x)](\nu) \\ = \ & FT[f(x)\mathrm{comb}_T(x)](\nu) \\ = \ & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{comb}_T(x)\exp(-i2\pi\nu x)dx \end{aligned} \tag{10}$$

となります．(1) 式のくし形関数の定義により，(10) 式は

$$\begin{aligned} & FT[f_T(x)](\nu) \\ = \ & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nT)\exp(-i2\pi\nu x)dx \\ = \ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\exp(-i2\pi\nu x)\}\delta(x-nT)dx \end{aligned} \tag{11}$$

となります．(11) 式の積分は，(9) 式と同じように

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\exp(-i2\pi\nu x)\}\delta(x-nT)dx \\ = \ & \int_{-\infty}^{\infty} \{f(nT)\exp(-i2\pi\nu x)\}\delta(nT-nT)dx \\ = \ & f(nT)\exp(-i2\pi\nu nT). \end{aligned} \tag{12}$$

となりますから，(11) 式は

$$FT[f_T(x)](\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\exp(-i2\pi\nu nT) \tag{13}$$

となります．$f_T(x)$ は $f(x)$ を間隔 T でサンプリングしたものですから，$f(nT) = f_T(nT)$ です．よって (13) 式は

$$FT[f_T(x)](\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_T(nT)\exp(-i2\pi\nu nT). \tag{14}$$

となります．

ここまでは，$f(x)$ が先にあって，$f_T(x)$ は $f(x)$ をサンプリングしたものと考えてきました．ここで，発想を転換して，$f(x)$ がどんなものかは不明で，$f_T(x)$ だけが与えられていると考えます．そうすると，$f_T(x)$ は単に数値の列となり，これを $u(n)$ と表すことにします．$u(n)$ は，$f(x)$ や $f_T(x)$ のように x の大きさを「測る」ものではなく，$n = 1, 2, \ldots$ と「数える」ものとなります．このような表現は，$u(n)$ で n が 1 だけちがうことは，$f_T(x)$ のほうでは長さ T だけ離れていることに対応していますから，サンプリング間隔 T を 1([単位長さ]) とする新しい単位で長さを表現していると考えることもできます．このようにして，

$$u(n) = f_T(nT) \tag{15}$$

と表します．すると，(14) 式は

$$\tilde{U}(\nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(n)\exp(-i2\pi\nu n) \tag{16}$$

と表すことができます．この $\tilde{U}(\nu)$ を数列のフーリエ変換と考えます[2]．前節で説明したように，サンプリングされた数列のフーリエ変換は，周波数空間では周期関数になります．サンプリング間隔は 1([単位長さ]) ですから，周波数空間では周期 1([単位長さ] 分の 1) の周期関数になります．したがって，周波数空間では 1 周期分だけを考えることにします．

さて，数列のフーリエ変換では，実空間では離散的になっているのに，周波数空間では連続な関数が得られています．これでは計算機で扱うのには不便ですから，$\tilde{U}(\nu)$ を，周波数空間の 1 周期を N 等分してサンプリング，つまり $1/N$([単位長さ] 分の 1) 間隔でサンプリングしたもの，すなわち

$$\tilde{U}\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(n)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{N}n\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{17}$$

を考えます．この「周波数空間で $1/N$([単位長さ] 分の 1) ごとにサンプリングする」操作では，実空間ではどのように影響するのでしょうか？ それは，サンプリング定理を逆に使うことでわかります．周波数空間の関数 $F(\nu)$ から実空間の関数 $f(x)$ を求める変換を逆フーリエ変換 (inverse Fourier transformation) といいます．第 1 講で説明したように，周波数空間における周波数 ν の成分は，実空間での $\exp(i2\pi\nu x)$ の係数に対応しますから，逆フーリエ変換は

$$FT^{-1}[F(\nu)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp(i2\pi\nu x)d\nu = f(x) \tag{18}$$

と表され[3]，フーリエ変換とほとんど同じ計算になります．したがって，サンプリング定理についての議論は逆フーリエ変換についてもなりたち，「周波数空間で $1/N$ ごとにサンプリングする」ことは「実空

[2] 1 次元の関数を考えている場合，実空間の軸は時間であることが多いので，この計算を離散時間 n の関数 $u(n)$ の離散時間フーリエ変換 (discrete time Fourier transformation, DTFT) ともいいます．

[3] この式の右辺は，本によっては $1/N$ で割って正規化されているものもあります．この点については，第 4 講の「ユニタリー変換」のところで説明します．

間では周期 N の周期関数になっていると考える」ことを意味します．したがって，「数列のフーリエ変換を周波数空間で $1/N$ 間隔でサンプリングする」ことは，「実空間で N 点でできている数列を，左右に無限に繰り返すことで周期関数に拡張した数列のフーリエ変換を求めている」ことに相当します．だから，周波数空間で $1/N$ 間隔でサンプリングしても，もともとの数列がちょうど N 個の数でできている有限数列であれば，「それを周期関数に拡張した数列のフーリエ変換」という意味で，とりあえず元の数列のフーリエ変換が求められていることになります．

そこで，$u(n)$ は N 個の数でできている有限数列であるとし，$n = 0, 1, \ldots, N-1$ 以外ではすべて $u(n) = 0$ とします．すると，(17) 式から

$$\tilde{U}(\frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} n) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{19}$$

となります．$\tilde{U}(\frac{k}{N})$ はすでにサンプリングされていますから，これをあらためて数値の列と考えて $U(k)$ と表すことにすると，

$$U(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} n) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{20}$$

となります，これを離散フーリエ変換 (discrete Fourier transformation, DFT) といいます．計算機で行うフーリエ変換は，すべてこの離散フーリエ変換です．

例として，サンプリング間隔 $T = 1$([mm]) でサンプリングされ，$N = 256$ 点からなる 1 次元の画像（信号）$u(n)$ があるとします．この画像を離散フーリエ変換して $U(k)$ を得たとき，k の 1 刻みは，もとの画像における周波数空間では何 ([1/mm]) の周波数に相当するかを考えてみましょう．T([mm]) 間隔でサンプリングされた信号をフーリエ変換すると，周波数空間においてはサンプリングされる前の信号のフーリエ変換が周期 $1/T$([1/mm]) でくりかえされたものが得られます．離散フーリエ変換では，周波数空間における，この周期 $1/T$([1/mm]) を N 等分したものを 1 刻みとしているので，1 刻みは $1/NT$([1/mm]) に相当します．この例では $T = 1$(mm)，$N = 256$(刻み) なので，1 刻みは 1/256([1/mm]) に相当します．図 5 にこの関係を図示します．

ところで，N 個の実数値からなる数列の離散フーリエ変換では，$U^*(N-k) = U(k)$ となります．なぜならば，$U(k)$ の複素共役を $U^*(k)$ とするとき，$u(n)$ が実数列ならば，

$$\begin{aligned} U^*(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} u^*(n) \exp(i2\pi \frac{N-k}{N} n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(i2\pi n) \exp(i2\pi \frac{-k}{N} n) \end{aligned} \tag{21}$$

となり，n が整数のとき $\exp(i2\pi n) = 1$ ですから

$$\begin{aligned} U^*(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(i2\pi \frac{-k}{N} n) \\ &= U(k). \end{aligned} \tag{22}$$

となるからです．このことは，N 点の離散フーリエ変換は周波数空間で最大 $N/2$ の周波数までしか表現していないことを意味しています．すなわち，周波数空間で本当に意味があるのは $U(0)$ から $U(N/2)$ の $N/2+1$ 個の数だけであるということになります．また，図 5 からわかるように，$k = N/2$ すなわち数列の真ん中が最高周波数となり，$k = 0$ つまり数列の端が周波数 0 に相当します．

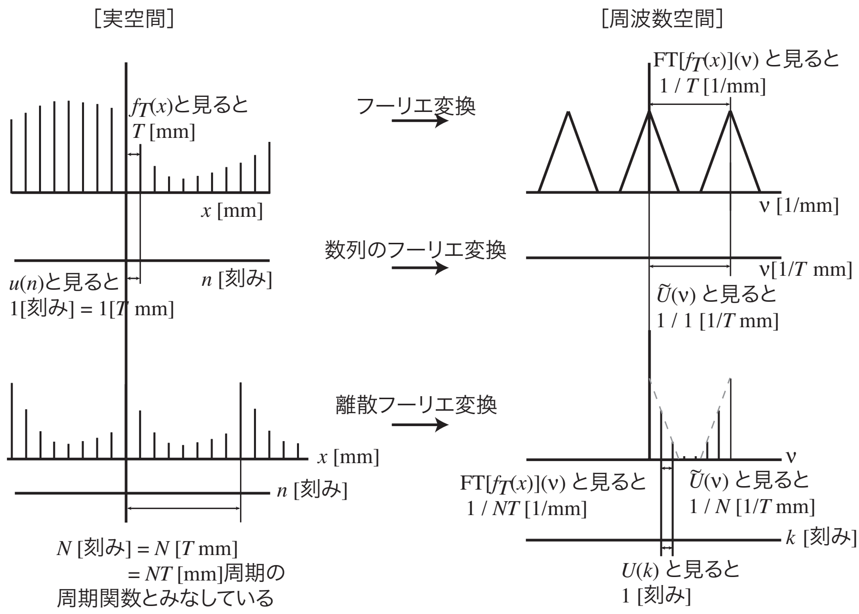

図 5: 離散フーリエ変換

付録１．コンヴォリューションとフーリエ変換

実空間の関数 f, g のフーリエ変換をそれぞれ F, G とすると，逆フーリエ変換の式（(18) 式）から，

$$
\begin{aligned}
& f(x)g(x) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp(i2\pi\nu x)d\nu \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu)\exp(i2\pi\mu x)d\mu \\
= & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\nu)d\nu \exp(i2\pi(\nu+\mu)x)d\mu \qquad \text{(A1)}
\end{aligned}
$$

となります．ここで $\nu + \mu = \xi$ と変数変換すると

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\xi-\nu)d\nu \exp(i2\pi\xi x)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [F * G](\xi)\exp(i2\pi\xi x)d\xi \\
&= FT^{-1}[F * G](x) \qquad \text{(A2)}
\end{aligned}
$$

となるので，(A2) 式の逆変換を考えると (3) 式が得られます．

付録２．くし形関数のフーリエ変換（概略）

(1) 式のくし形関数 comb$T(x)$ の定義から，comb$T(x)$ は周期 T の周期関数であることがわかります．周期 T の周期関数は，周波数が $1/T$ の整数倍である正弦波の級数，すなわち

$$
\mathrm{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i2\pi \frac{n}{T} x). \qquad \text{(A3)}
$$

で表されます（n は整数）．周波数 n/T の係数 a_n は，直交関数系の性質から $\exp(-i2\pi\frac{n}{T}x)$ をかけて積分すれば求まります．このとき積分区間は $-\infty$ から ∞ ではなく，周期 T の周期関数ですから $-T/2$ から $T/2$

になります．また正規化のために係数 $1/T$ をかけます．すると，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{comb}_T(x)\exp(-i2\pi\frac{n}{T}x)dx \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(x)\exp(-i2\pi\frac{n}{T}x)dx \\ &= \frac{1}{T}\exp(-i2\pi\frac{n}{T}\cdot 0) = \frac{1}{T} \end{aligned} \tag{A4}$$

となりますから[4]，

$$\mathrm{comb}_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(i2\pi\frac{n}{T}x) \tag{A5}$$

となります．よって，そのフーリエ変換は

$$FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} FT[\exp(i2\pi\frac{n}{T}x)](\nu) \tag{A6}$$

となります．ここで，前回の説明にあったように，$\exp(i2\pi\frac{n}{T}x)$ をフーリエ変換すると周波数空間で $\nu = n/T$ のところにピークがたつわけですから，(A6) 式から

$$\begin{aligned} FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-\frac{n}{T}) \\ &= \frac{1}{T}\mathrm{comb}_{1/T}(\nu) \end{aligned} \tag{A7}$$

が得られます．

参考文献

H.P.Hsu, *Applied Fourier Analysis,* ISBN0-15- 601609-5
（佐藤平八訳，フーリエ解析，森北出版 ISBN4- 627-93010-0）

なお，各参考書では周波数 ν のかわりに角周波数 $\omega = 2\pi\nu$ を使って説明されていることも多く，その場合係数等が違っていることに注意してください．また，フーリエ変換と逆フーリエ変換につく係数も表現のしかたによって違っています．

[4] この計算がフーリエ級数展開です．詳しくは，今日の参考文献にあげた森北出版「フーリエ解析」を見てください．