t 分布と推定・検定

不偏分散を用いた推定・検定の方法の２回目は，t 分布をとりあげます．t 分布は，正規母集団を仮定するとき，母分散を不偏分散で代用した「正規分布の代用品」で，これを用いて母平均についての推定や検定を行うことができます．母平均に対する統計的推測を行う機会は多いので，t 分布は統計データ解析でもっとも出会う機会の多い確率分布の１つです．

---

t 分布

２つの互いに独立な確率変数 Y, Z があり，Y が自由度 k の χ^2 分布 $\chi^2(k)$ にしたがい，さらに Z が標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがうとします．このとき，

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{k}}} \tag{1}$$

がしたがう確率分布を自由度 k の t 分布（スチューデントの t 分布）といい，$t(k)$ で表します．

この確率分布がどういう場合に現れるかを見てみましょう．母平均 μ，母分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう母集団から，n 個からなる標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をとります．そして，その標本平均を $\bar{X}$ とします．$\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ にしたがうので，

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \tag{2}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがいます．これを用いて母平均 μ についての推定や検定ができればよいのですが，それには母分散 σ^2 がわかっていなければなりません．しかし，母平均が未知なのに母分散がわかっているというのは，普通は考えにくいことです．そこで，母分散 σ^2 を不偏分散 s^2 で代用した

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \tag{3}$$

を考えます．これを t 統計量といいます．σ^2 が s^2 に変わっただけですが，この t 統計量がしたがう分布は $N(0,1)$ ではありません．この式を次のように変形してみます．

$$t = \frac{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)} = \frac{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)}{\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}}} = \frac{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)}{\sqrt{\frac{(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \tag{4}$$

ここで (4) 式の分子は (2) 式の Z と同じで，この Z は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがいます．また，分子の根号の中について

$$Y' = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \tag{5}$$

とおくと，前回の付録で説明したように，Y' は自由度 $n-1$ の χ^2 分布すなわち $\chi^2(n-1)$ にしたがいます．このとき (4) 式は

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y'}{n-1}}} \tag{6}$$

となります．やはり前回の付録（不偏分散と χ^2 分布の関係）で述べたように，$\bar{X}$ と s^2 が独立であることがいえる（証明は略）ので，Z と Y' は独立です．よって，(3) 式の t 分布の定義とくらべると，t 統計量は自由度 $(n-1)$ の t 分布 $t(n-1)$ にしたがうことがわかります．

t 統計量は，母分散 σ^2 を使って標準化された，標準正規分布にしたがう統計量の，σ^2 を不偏分散 s^2 に置き換えたものです．したがって，t 統計量がしたがう t 分布の確率密度関数は，標準正規分布によく似た左右対称の形になっています．とくに，標本サイズ n が大きいときは，標本も母集団もほとんど同じになるので，t 分布も標準正規分布とほとんど同じになります．

---

t 分布と区間推定

t 分布を用いると，母分散が不明の場合でも，標準正規分布の場合と同様に母平均の信頼区間を求めることができます．次の問題を考えてみましょう．

> ある試験の点数の分布は正規分布であるとします．この試験の受験者から 10 人の標本を無作為抽出して，この 10 人の点数を平均したところ 50 点で，またこの 10 人の点数の不偏分散が 5^2 でした．このとき，受験者全体の平均点の 95%信頼区間を求めてください．

自由度 $n-1$ の t 分布において，$t_{0.025}(n-1)$ を「t 統計量がその値以上になる確率が 0.025 であるような値」（「2.5 パーセント点」といいます）とし，$-t_{0.025}(n-1)$ を「t 統計量がその値以下になる確率が 0.025 であるような値」とすると

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95 \tag{7}$$

が成り立ちます（図 1）．この式から，

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95 \tag{8}$$

となりますから，μ の 95%信頼区間は (8) 式のかっこ内の範囲となります．

$t_\alpha(\nu)$，すなわち自由度 ν の 100α パーセント点の値を知るには，数表を利用することができます．数表では，各自由度 ν（縦軸）と定数 α（横軸）に対して，$t_\alpha(\nu)$ が縦 ν・横 α の交点の値を読むことで求められます．この問題の場合，標本平均 $\bar{X} = 50$，不偏分散 $s^2 = 25$ で，数表から $t_{0.025}(10-1) = 2.262$ ですから，μ の 95%信頼区間は「46.4（点）以上 53.6（点）以下」となります．

前回の例のように，母分散が 25 とわかっているときには，μ の 95%信頼区間は「46.9（点）以上 53.1（点）以下」でしたから，今回の場合の方が信頼区間が広くなっています．信頼区間が広いということは，推定が不確かであることを意味しています．これは，不偏分散は母分散そのものではなく，母分散を推定した値であるため，不偏分散にはすでに不確かさが入っているためです．

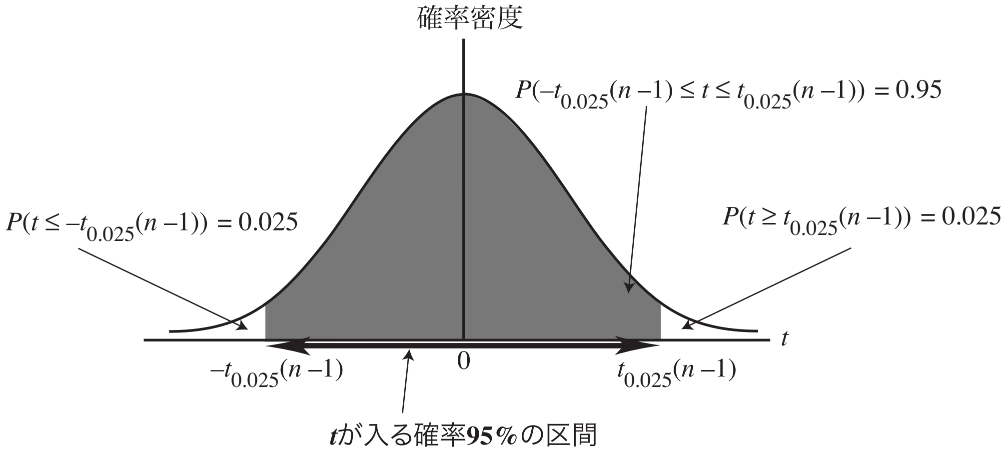

図 1: t 分布と区間推定

t 分布と検定

同じ考えで，母平均に関して検定を行なう問題を考えてみましょう．

> ある試験の点数の分布は正規分布であるとします．この受験者全体から無作為抽出された 10 人の標本の点数の平均は 50 点で，不偏分散は 5^2 でした．このとき，「受験者全体の平均点は 53 点よりも小さい」といえるか，有意水準 5%で検定してください．

問題から，帰無仮説 $H_0 : \mu = 53$, 対立仮説 $H_1 : \mu < 53$ の検定を行います．母平均を μ，標本平均を $\bar{X}$，不偏分散を s^2，標本サイズを n とするとき，上で述べたとおり，

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \tag{9}$$

という値は，自由度 $n-1$ の t 分布にしたがいます．

「対立仮説 $H_1 : \mu < 53$」というのは，「帰無仮説が棄却されたとすると，そのときは $\mu < 53$ という対立仮説を採択する」という意味です．つまり，「帰無仮説が棄却されたとすると，それは『μ は 53 では大きすぎる』からだ」という推論をしたいわけです．μ が大きくなると，(9) 式の t は小さくなります．ですから，「t が小さすぎるとき」帰無仮説が棄却されるように，棄却域を設定します．t 分布の数表から，自由度 $n-1=9$ のとき，(9) 式の t が $-t_{0.05}(9) = -1.833$ 以下である確率すなわち $P(t \le -1.833)$ が 5%であることがわかります．ですから，問題文の数値を入れて (9) 式の t を計算し，その値が -1.833 以下であれば帰無仮説を棄却します．

問題文の $s^2 = 25$，$\bar{X} = 50$，$n = 10$，それに $\mu = 53$ を (9) 式に代入すると $t = -1.897$ ですから，この t は棄却域に入っています．したがって，帰無仮説を棄却して対立仮説を採択し，「受験者全体の平均点は 53 点よりも小さい」と結論します．

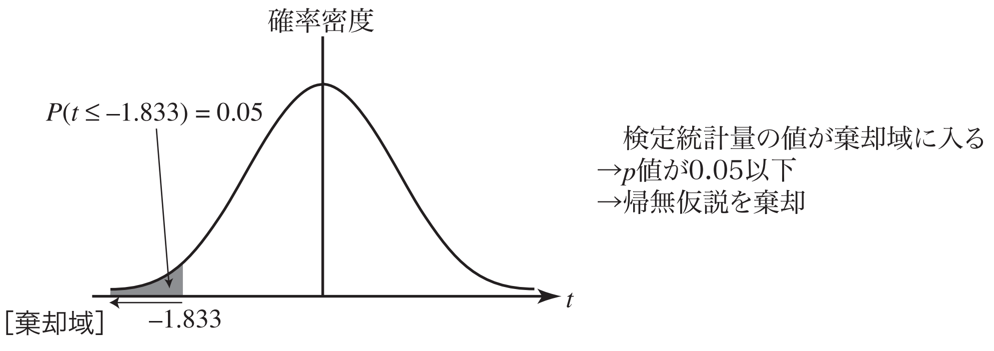
確率密度
P(t ≤ −1.833) = 0.05
t
［棄却域］
−1.833
検定統計量の値が棄却域に入る
→p値が0.05以下
→帰無仮説を棄却

図 2: t 分布と検定