2007 年度後期　情報統計学

２項分布の期待値の導出

２項分布の期待値の導出について，質問がありましたので，プリントで解説します．板書は，誤りもあり，説明が不十分でした．申し訳ありません．

確率変数 X が，２項分布 $B(n, p)$ にしたがうとします．このとき，X の期待値 $E(X)$ は，２項分布の定義から

$$E(X) = \sum_{r=0}^{n} r\Pr(X = r) \tag{1}$$

となり，$r = 0$ のときは $r\Pr(X = r) = 0$ ですから，

$$E(X) = \sum_{r=1}^{n} r\Pr(X = r) = \sum_{r=1}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r} \tag{2}$$

となります（$q = 1 - p$）．

ここで，

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_r &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n\cdot(n-1)!}{r\cdot(r-1)!((n-1)-(r-1))!} \\ &= \frac{n}{r}\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!} \\ &= \frac{n}{r}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} \end{aligned} \tag{3}$$

となりますから，

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{r=1}^{n} r\cdot\frac{n}{r}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} p^r q^{n-r} \\ &= n\sum_{r=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} p^r q^{n-r} \\ &= np\sum_{r=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} p^{r-1} q^{n-r} \end{aligned} \tag{4}$$

となります．ここで，２項展開の形に持ち込むために，$j = r - 1$ とおきかえると，

$$\begin{aligned} E(X) &= np\sum_{j=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_j p^j q^{n-(j+1)} \\ &= np\sum_{j=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_j p^j q^{(n-1)-j} \end{aligned} \tag{5}$$

となり，右辺の和は $(p+q)^{n-1}$ の２項展開になっています．また，$p + q = 1$ ですから，

$$E(X) = np(p+q)^{n-1} = np \tag{6}$$

となります．