2007 年度後期　情報統計学

正規母集団における母分散の最尤推定

板書途中で詰まってしまった，「正規母集団における母分散の最尤推定」（教科書 p. 192 の例 10，最尤推定量は不偏分散にはならないことについて）を，プリントで解説します．講義の際は，申し訳ありませんでした．

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{1}$$

であらわされます[1]．よって，標本を $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とするとき，尤度関数 L は

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2|x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_1-\mu)^2/2\sigma^2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_n-\mu)^2/2\sigma^2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2/2\sigma^2} \end{aligned} \tag{2}$$

となり[2]，対数尤度 $l = \log L$ は

$$\begin{aligned} l &= -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2/2\sigma^2 \\ &= -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

となります．ここで，$\partial l/\partial\sigma^2 = 0$ とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial\sigma^2} = 0 - \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot (-1)\frac{1}{(\sigma^2)^2} &= 0 \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 &= 0 \\ -\frac{n\sigma^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

となり，すなわち

$$\begin{aligned} -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 &= 0 \\ \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} \end{aligned} \tag{5}$$

となります．すなわち，母分散 σ^2 の最尤推定量は $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n}$ となり，不偏分散 $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{n-1}$ とは異なることがわかります．

[1] "$f(x|\mu, \sigma^2)$" という表現は，「μ と σ^2 をパラメータとする，x（確率変数の値）の関数」を表わしています．

[2] 一方，"$L(\mu, \sigma^2|x_1, \ldots, x_n)$" という表現では，$L$ は μ と σ^2 の関数で，$x_1, \ldots, x_n$ のほうがパラメータになっています．