2010年度後期　情報統計学　第３回演習の解答例

1. X は1回あたりの賞金の額ですから，とりうる値は20または-10となります．20 (円) もらえる確率が1/2，-10 (円) もらえる確率が1/2ですから，この確率分布を $P(X = 20) = 1/2, P(X = -10) = 1/2$ と表すことができます．よって，期待値は $20 \times (1/2) + (-10) \times (1/2) = 5$（円）となります．

2.

∧∧
≡・・≡ この賭けは，どうみてもやりたいとは思わないんですけど ...
(　)〜

∧◆∧
まあ，ふつうはそうやな．そやけど，期待値はどうなるやろか？ 三 o- o 三
(　　)〜

可能な X の値は $2, 2^2, \dots, 2^n, \dots$ となり，やはり無限の種類があります．賞金が 2^n (円) である確率は $1/2^n$ ですから $(n = 1, 2, ...,)$，X がしたがう確率分布は $P(X = 2) = 1/2, P(X = 2^2) = 1/2^2, \dots, P(X = 2^n) = 1/2^n, \dots$ と表されます．

したがって，期待値 $E(X)$ は $2^1 \times (1/2^1) + 2^2 \times (1/2^2) + \cdots + 2^n \times (1/2^n) + \cdots = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \to \infty$ となります．

「賞金の額の期待値が無限大」ということは，この賭けを永遠にし続ければ無限に儲かる，つまり，客はいくら損をし続けても，いつかはその損をすべて取り返せる，というのが統計学や確率論の結論です．ネット上にこの賭けのシミュレータがあり，これまでの賭けの収支も掲載されています．これを見ると，長い目で見ると確かに胴元が損をしていることが記録されています．

しかし，では1回100円の賭け料でこの賭けをするかといわれれば，やらないでしょう．それは，「人は期待値の大小ではなく，期待効用の大小にしたがって行動する」からです．効用とは，満足度のことです．効用は金額に比例して多くはなりません．人は，この賭けに対して，確率の小さい，自分が生きているうちにめぐってくるかどうかもわからない大きな収益よりも，大きな確率で生じる小さな損失を重く見て，「この賭けは損だ，思うような満足度が得られない」と判断するのです．

この例は，数学者ダニエル・ベルヌーイによって提示されたもので，「サンクト・ペテルブルクのパラドックス」と言われています．「サンクト・ペテルブルクのパラドックス」については，講義のサイトの「統計データ・ツールへのリンク」から，解説のページやシミュレータのページにリンクしてありますので，参照してください．

∧∧
≡・・≡
(　)〜

でも，「自分が生きているうちにめぐってくるかどうかもわからない大きな収益よりも，大きな確率で生じる小さな損失を重く見る」んだったら，宝くじだって同じだから，誰も宝くじを買わないはずじゃありませんか？ ましてや，宝くじは期待値もそう大きくないわけだし．

∧◆∧
三 o- o 三
(　)〜

まあ，確かにそうやな．ただ，「サンクト・ペテルブルクのパラドックス」の場合は「いつ当たるかわからない，永遠に当たらないかもしれない」と思うのに対して，宝くじの場合は，コマーシャルで言っているように「必ず誰かは当たってる」わけやな．「一人の人が当たる確率」を論じる上では，「サンクト・ペテルブルクのパラドックス」と宝くじには，そんなに大きな違いはない．そやけど，心理的な印象には多少違いがあるんとちがうやろか．