2010 年度後期　統計データ解析Ｂ

「行列」を知らない人のために

「行列」や「ベクトル」の考え方の基本を，高校で習っていない人向けに，手短に解説します．

主成分分析の説明で，もとの変量 x_1, x_2 から新しい総合得点，すなわち第 1 主成分 $z_{(1)}$ を作る計算を

$$z_{(1)} = a_{(1)1}x_1 + a_{(1)2}x_2 \tag{1}$$

と表しました．これを，「ベクトル」の書き方では，次のように書きます．

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(1)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

右辺の左側の () を**行ベクトル**，右側の () を**列ベクトル**といいます．

一方，第２主成分を求める計算も，同様にベクトルを用いると

$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{(2)1} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となります．これらをひとつにまとめて，次のように書きます．

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(1)2} \\ a_{(2)1} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

この式の右辺にある，文字の４つ入った () を，**行列**といいます．行ベクトルが列になって並んでいるので，行列というわけです．

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を座標平面でのある点と考えると，この計算は，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ という点を $\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix}$ という点に移動する計算を表す，ということもできます．

一方，上の行列を求める計算として

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

という式が出てきました．ここで，右辺の λ は普通の数（スカラー）で，右辺は $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ を表します．

この関係を満たす λ は２つあり，それらを $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ と表すと，それぞれに対応する式は

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

と表されます．今度は，これらの２つの式をひとつにまとめて表します．列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix}$ を左右にくっつけて，$\begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix}$ と，ひとつの行列で表します．すると，(6), (7) の２つの式は，ま

とめて

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

と表すことができます．

(8) 式の左辺は，上で述べたとおり $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix}\right)$ のように，列ベクトルを左右にくっつけたものです．一方右辺は，右側の行列を $\begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{(2)} \end{pmatrix}\right)$ と列ベクトルに分けて考えると，左側の行列と，右側の行列の左側の列ベクトルの積は $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)}a_{(1)1} + 0 \cdot a_{(2)1} \\ \lambda_{(1)}a_{(1)2} + 0 \cdot a_{(2)2} \end{pmatrix}$ となり，すなわち $\lambda_{(1)}\begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix}$ となります．右側の列ベクトルについても同様です．このように，（行列×列ベクトル）のかけ算を２つ同時に行うのが，行列のかけ算です．