2011 年度前期　推測統計学への招待　第 6 回

めったに起きないことなんだから，今も起きていないはず − 2項分布モデルと検定

ここまでの講義で，「『50%の確率で当たる』というくじを 20 本ひいたところ，6 本しか当たらなかった．『50%の確率で当たる』というのはウソじゃないか？」という問題を考えるために，2項分布モデルの考え方と，ド・モアブル＝ラプラスの定理と正規分布モデルを用いた計算のしかたについて説明してきました．今回は，いよいよ，ここまで説明した知識を使って，この問題にどう答えるかを説明します．

2項分布と検定

まず，この問題をもう一度考えてみましょう．

> あるくじは，50%の確率で当たるとします．このくじを 10 本ひくと，全部はずれでした．このくじは，本当に 50%の確率で当たるのでしょうか．当たる確率はもっと小さいのではないでしょうか？

このときは，「50%の確率で当たるはずのくじが 10 本続けてはずれることなど，めったにあるはずがない」と考えるのは自然なことです．そうすると，最初の「50%の確率で当たる」は間違いで，「このくじの当選確率は 50%よりも小さい」と考えるほうが妥当です．これに対して，この講義でおもに考えているのは次のような問題です．

> あるくじは，50%の確率で当たるとします．このくじを 20 本ひくと，6 本当たって 14 本はずれでした．このくじは，本当に 50%の確率で当たるのでしょうか．当たる確率はもっと小さいのではないでしょうか？

今度は少々微妙な状況です．前の状況と同じように「当たる確率は 50%よりも小さい」のかもしれませんが，もしかしたら「当たる確率は 50%」というのが本当で，単に運が悪かったのかもしれません．

どちらが正しいのかは，わかりません．しかし，当選確率が 50%か，それともそれより小さいのか，どちらの言い分がよりもっともかを，統計学を使って判断をするのが**仮説検定**（あるいは単に**検定**）という手法です．

では，仮に「当選確率は 50%である」ということを認めるとしましょう．さきほど，「当選確率 50%のとき，10 回続けてはずれることはめったにない」ということを述べましたが，では「当選確率が 50%のとき，20 本ひいて 6 本しか当たらない」ことは，どのくらい「めったにない」ことなのでしょうか．それを計算することを考えてみましょう．

第 4 回の講義で説明したように，「当選確率が 50%のとき，20 本ひいて 6 本しか当たらない」ことが「どのくらい『めったにない』ことか」を計算するには，「20 本ひいて，当たりが 6 本以下である」確率を求める必要があります．これを，第 4 回の講義で説明したド・モアブル＝ラプラスの定理を使って計算します．この定理によると，「当選確率 p のくじを n 回ひいたときの当選回数」を S とすると，S は正規分布 $N(np, np(1-p))$ にしたがいますから，「当選確率 50%のくじを 20 本ひいて，当たり回数が 6 本以下で

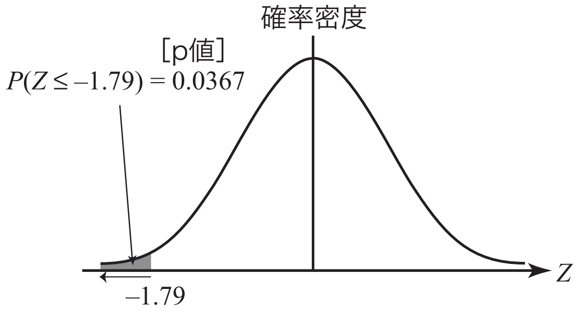

図 1: p 値

ある」確率は，$p = 0.5$, $n = 20$ として「$S \leq 6$」である確率となります．S が正規分布 $N(np, np(1-p))$ のとき，

$$Z = \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{1}$$

とおくと Z は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがいます．また，$S = 6$ のとき

$$Z = \frac{6 - 20 \cdot 0.5}{\sqrt{20 \cdot 0.5 \cdot (1 - 0.5)}} = -1.79 \tag{2}$$

ですから，「$S \leq 6$」である確率は「$Z \leq -1.79$」となる確率となります．数表から，この確率は 0.0367 であることがわかります．

p 値と検定

以上のことから，「当選確率が 50%であるとするとき，このくじを 20 回ひいて，当たり回数が 6 回以下である」確率は 0.0367 であることがわかりました．この値を p **値**といいます．

「当選確率 50%としたとき，このくじを 20 回ひいて，当たり回数が 6 回以下である」確率は 0.0367 です．では，「当選確率 50%としたとき，このくじを 20 回ひいて，当たり回数が 6 回以下である」ことは「めったにないこと」なのでしょうか？　それはなんともいえません．「確率 0.0367 でしか起きない」のか，「起きる確率が 0.0367 もある」のか，それは考え方によるでしょう．

しかし，それでは話は続きません．そこで，統計学では「起きる確率がある値以下のときは，それは『めったにない』ことだ」と考えます．つまり，そんなに小さな確率でしか起きないはずのことが起きたのは，「偶然そうなった」と説明するよりも，「当選確率が 50%である」という考え自体が間違っているという「必然」があった，という説明をするほうが合理的だ，と考えているのです．偶然ではなく必然的に何かが起きることを「**有意**である」といいます．そこで，この「ある値」のことを**有意水準**といい，通常 5%(0.05) や 1%(0.01) が用いられます．

ここでは，有意水準を 5%としましょう．そうすると，0.0367 は 5% より小さいですから，「当選確率 50%としたとき，このくじを 20 回ひいて，当たり回数が 6 回以下である」ことは「めったにないこと」だ，と判断されます．そこで，

仮に，当選確率が 50%とする
→そうすると「20 回くじをひいて，当たり回数が 6 回以下である」という有意水準よりも小さい確率でしか起きない，つまり「めったにないはず」のことが現に起きていることになる

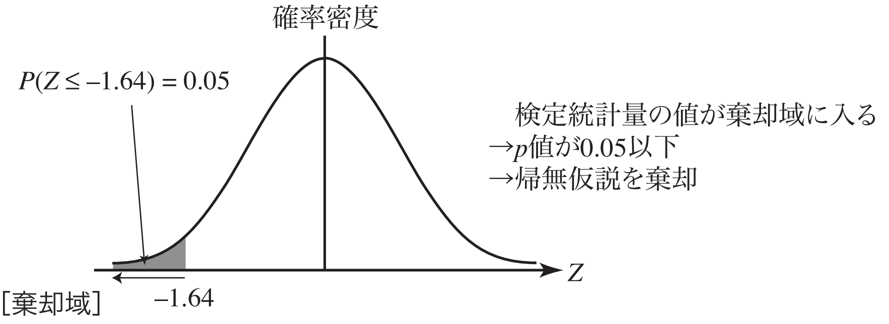

図 2: 棄却域

→「当選確率は本当に 50%で，偶然当たりが少なかった」という説明は受け入れない．当選確率は本当はもっと小さい，と結論する．

という推論が行えます．この推論を仮説検定（あるいは単に検定）といいます．

最初の「当選確率が 50%とする」という仮定を**帰無仮説**といい，$\mathrm{H}_0 : p = 0.5$ と表します．また，「当選確率が 50%というのは間違いと結論する」ことを，帰無仮説を**棄却する**といいます．さらに，帰無仮説が棄却された結果得られる「当選確率はもっと小さい」という結論を**対立仮説**といい，$\mathrm{H}_1 : p < 0.5$ と表します．

棄却域と検定統計量

上で，当たり回数 S が 6 以下である確率は，標準正規分布にしたがう確率変数 Z が -1.79 以下である確率と同じで，数表からこの確率，すなわち p 値は 0.0367 である，と述べました．

ところで，数表から「$Z \leqq -1.64$」となる確率が 5%です．ですから，Z の値が -1.64 以下であれば p 値が 5%以下となり，このとき帰無仮説を棄却します．

このことは，言い方を変えると「当たり回数 S が 6 のとき，Z は -1.79 である．一方，Z が -1.64 以下である確率は 5%である．つまり，確率 5%でしかおきないことが起きていることになるので，有意水準 5%で帰無仮説を棄却する」ということができます．この場合，いちいち p 値を計算する必要はありません．

この意味で，「$Z \leqq -1.64$」をこの問題における**棄却域**といい，計算の結果 Z の値が棄却域に入ることを「棄却域に落ちる」といいます．また，棄却域を表すのに用いる確率変数 Z を**検定統計量**といいます．

棄却されないときは

ここまでに述べたように，検定では，帰無仮説は「内心では」棄却されることが期待されています．目論見通り棄却されると，「対立仮説を採択する」という結論が得られるわけです[1]．

では，今回のくじびきの例で，有意水準を 1%にしてみましょう．この場合，p 値が 1%以下ならば帰無仮説を棄却します．ところが，今回の例では p 値は 0.0367 ですから，1%よりも大きくなっています．したがって，目論見に反して，帰無仮説は棄却されません．

[1]帰無仮説を「無に帰す仮説」とよぶのはその意味です．

この場合，帰無仮説が棄却されなかったのは，「帰無仮説が正しいとき，今おきている現実得られる確率は**非常に小さいとまでは言えない**」です．したがって，**「帰無仮説が間違っているかどうかはわからない」「対立仮説が採択できるかどうかはわからない」**という結論を導かなくてはなりません．今回の例でいえば，帰無仮説が棄却されなかった場合は，「当選確率は50%より小さいとは言えない」と答えなければなりません．つまり，「目論見ははずれた．当選確率は50%より小さいとまで断言する自信はない」という結論になるのです．

注意しなければならないのは，あくまで，「帰無仮説が正しいとき，今おきている現実得られる確率は非常に小さいとまでは言えない」であって，「確率が大きい」のではない，ということです．したがって，帰無仮説が棄却されなかったときに，「帰無仮説が正しい」「対立仮説は間違っている」という結論が得られるわけではありません．今回の例でも，「当選確率は50%である」などと答えてはいけません．つまり，

帰無仮説を棄却しない　＝　~~帰無仮説を採択する~~
対立仮説を採択するべきかどうか断言できない

ということです．なお，「帰無仮説を棄却すべきなのに棄却しない」という誤りを**第２種の誤り**といいます．

有意水準の違い

ところで，最初のくじびきの例では，有意水準が5%のときは「帰無仮説を棄却する＝50%の確率で当たるというのは間違い」と結論され，有意水準が1%のときは「帰無仮説を棄却しない＝50%の確率で当たるというのは間違いとはいい切れない」という結論になりました．しかし，「20本中6本しか当たらなかった」という現実は同じで，有意水準は勝手に決めたのに，こんなに違った結論になってもよいのでしょうか？

これについては，「検定とはそういうものだ」ということを，よく理解しなければなりません．有意水準は，検定をする人の「大胆さ・慎重さ」の程度を表しているのです．

有意水準が大きい (5%) ときは，今起きているような現実（6本しか当たらない）が起きる確率が少々大きくても，5%以下であれば「そんなことが起きるはずがない，帰無仮説は間違っている」と結論します．はっきり物をいう態度ではありますが，帰無仮説が正しい（くじの主催者が正直で，偶然6本しか当たらなかった）ときでも「間違っている」と断言してしまう可能性があります．大胆ですが，勇み足も多い，というわけです．

有意水準が小さい (1%) ときは，今起きているような現実が起きる確率が，1%以下と相当小さくないと，「わずかでもそんなことが起きる可能性があるのだから，帰無仮説は間違っているとは言い切れない」となり，結論を出しません．慎重ですが，煮え切らない態度ということになります．

検定はどんなときにするものなのか

ところで，帰無仮説が正しい（くじの主催者が正直で，6本しか当たらなかったのは単なる偶然だった）ときに帰無仮説を棄却してしまうという誤りを，**第１種の誤り**といいます．

ここまでの説明から，帰無仮説が正しいときに検定統計量が棄却域に落ちる確率は，有意水準と同じ

です．そのときは帰無仮説は棄却されてしまうのですから，

> **仮に帰無仮説が正しいとしても，有意水準 5%(1%) の仮説検定を何度も行うと，そのうち 5%(1%) は第 1 種の誤りを犯して棄却し，採択すべきでない対立仮説を採択してしまう**

ことになります．

ですから，同じ現象についてなんどもデータを集めて，同じ帰無仮説について検定を繰り返し，たまに対立仮説が採択されても，直ちに「帰無仮説は間違っている」とはいえません．例えば，「血液型と性格に関係はない」という帰無仮説について何度もデータを集めて検定を行い，たまに「血液型と性格に関係がある」という結論が出ても，直ちに「やっぱり血液型と性格に関係がある」ということにはなりません．何度も検定を行うと，帰無仮説が間違っていない場合でも，たまに対立仮説が採択されるのは，むしろ自然なことです．血液型と性格の問題でいえば，ごくたまに「血液型と性格に関係がある」という結論が出る程度であれば，「血液型と性格に関係があるとは今のところ言えない」というのが，科学的態度です．

では，検定の結論は結局何を言っているのでしょうか？ それは，今日の問題の例で言えば，

> **私は，くじの主催者が『50%の確率で当たる』と言うのは間違いだ，と判断する．**
> **ただし，私は 100 回中 5 回はウソを言う（第 1 種の誤りを犯す）人間である．**
> **今回私がウソを言っているかどうか，それは誰にもわからない．**

と言っているのに等しいのです．

この程度のことしか言っていないのに，検定にはどういう意味があるのでしょうか？

それは，検定とは，少ない数のデータしか，しかも 1 度だけしか調べられないときに，「それだけのデータからでも十分な確信をもって述べられる疑いだけを述べる」方法ということなのです．何度も検定できるほどデータがあつまるのなら，検定を用いるのは不適切です．

くじびきの場合は，今くじをひいた数だけのデータしか集められませんから，検定を用いるのは妥当です．しかし，上で述べた血液型と性格の問題では，長い間に集められたたくさんのデータについて検定を用いるのは，検定の目的からはずれています．

∧ ∧
≡ ・ ・≡
( )〜

じゃあ，データがたくさんあるときは，どんな方法を使うんですか？

くじびきの例でいえば，当たり確率がいくらかを，直接推定する方法を用いる．次回と次々回で，そのあたりを説明するわ．

∧◆∧
Ξ o- o Ξ
( )〜

今日の演習

今回は，検定の問題について，解答の書き方を練習してみましょう．これまで扱って来た問題を少し変えて

あるくじは，50%の確率で当たるとします．このくじを 20 本ひくと，9 本当たって 11 本はずれでした．このとき，「当選確率は 50%よりも小さい」という対立仮説を，有意水準 5%で検定してください．

とします．以下の$\boxed{\quad}$を埋め，【】内の選択肢を選んでいってください．

当選確率を p とする．対立仮説 H_1 は$\boxed{\quad\quad}$，帰無仮説 H_0 は$\boxed{\quad\quad}$となる．

くじの本数を n，当たり本数を S とし，このくじが$\boxed{\quad\quad\quad}$試行であると考えると，

$$Z = \frac{\boxed{\quad\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad\quad}}$$

は$\boxed{\quad\quad\quad}$分布にしたがう．

この問題では，対立仮説が$\boxed{\quad\quad}$であるから，「当たり確率は本当は 0.5 よりも【大きい・小さい】」という結論を導けるかどうかを検定する．したがって，帰無仮説が正しい，すなわち$\boxed{\quad\quad}$のとき，実際の当たり本数が【多すぎる・少なすぎる】のであれば，帰無仮説を$\boxed{\quad\quad}$し，対立仮説を$\boxed{\quad\quad}$する．

当たり本数 S が小さいとき，上の式の Z は【大きくなる・小さくなる】．したがって，くじの本数・当たり本数が問題文のとおりのとき，帰無仮説が正しいとするならば確率 5%でしか起きないくらいに Z が小さくなるのであれば，帰無仮説を$\boxed{\quad\quad}$し，対立仮説を$\boxed{\quad\quad}$する．

問題文から $n =$$\boxed{\quad\quad}$，$S =$$\boxed{\quad\quad}$で，これと $p =$$\boxed{\quad\quad}$を上の式に代入して Z を求めると，$Z =$$\boxed{\quad\quad}$となる．

一方，Z は$\boxed{\quad\quad\quad}$分布にしたがうので，$Z <$$\boxed{\quad\quad}$である確率が 5%である．したがって，帰無仮説が正しいとするとき，「問題文の当たり本数は，確率 5%でしか起きないほど少なすぎる」と【言える・は言えない】．つまり，帰無仮説は$\boxed{\quad\quad\quad}$ので，結論は「『当選確率は 50%よりも小さい』と【言える・は言えない】」となる．