## 2011 年度秋学期　解析応用　第１４回

# 検出力と尤度比検定

統計学における区間推定や仮説検定については，これまでに「基礎数学（確率・統計）」や「統計学」で学んだことがあると思います。今日は，仮説検定の誤りの確率と「検出力」について，さらに仮説検定の根拠となる考え方のひとつである「尤度比検定」を説明します。

---

### 仮説検定の考え方

「背理法」という論証の方法があります。それは，次のような考え方になっています。

「論証したい事柄を否定する仮定を行う」
↓
「仮定から導かれた事柄に，矛盾があることを示す」
↓
「仮定が間違っていると結論する」

**仮説検定**は，これと同じような論証を，母集団についての仮定を使って行います。それは，次のような考え方になります。

「母集団について述べたい事柄を否定する仮定（仮説）を行う」
↓
「『仮定が正しい』としたとき，ある統計量の値が『現在観察されている標本から得られる**確率が非常に小さい**』範囲に入っていることを示す」
↓
「仮定が間違っていると**考えたほうがよい**，と結論する」

このように，背理法では

「仮定をする」→「仮定から導かれる事柄は，**絶対に起こりえない**」

という考え方で論証しますが，仮説検定では

「仮定をする」→「仮定から導かれる値は，**得られる可能性がほとんどない**」

という考え方をします。したがって，仮説検定によって得られる判断は「必ず正しい」わけではなく，「正しい可能性が大きい」というだけものです。そこで，仮説検定では「仮説が間違っている」「仮説を否定する」とは言わず，「仮説を**棄却する**」といいます。また，このような判断の対象になる仮説を，**帰無仮説**といいます。

---

## 検出力

上で述べたように，仮説検定による判断には常に「判断が間違っている」危険性があります。「判断が間違っている」確率をゼロにすることはできませんが，なるべく小さくする必要はあります。

この「判断の間違い」には，２種類の間違いがあります。１つは，**「仮説が本当は正しいのに，仮説を棄却してしまう」**という間違いで，**「第１種の誤り」**といいます。もう１つは**「仮説が本当は間違っているのに，仮説を棄却しない」**という間違いで，**「第２種の誤り」**といいます。刑事裁判にたとえていえば，「被告人は無実」という仮説に対して「被告人が本当に無実なのに，『有罪』の判決を出してしまう」というのが第１種の誤りで，「被告人が本当は犯人なのに，『無罪』の判決を出してしまう」のが第２種の誤りです。

この２種類の誤りを犯す確率を，両方とも同時に一定限度よりも小さくすることは，一般にはできません。そこで，統計学ではふつう

> 「第１種の誤りを犯す確率 $\alpha$ がある一定の（小さな）値であることを保証したうえで，第２種の誤りを犯す確率 $\beta$ をできるだけ小さくする」のが「よい」検定である[1]

という原理を採用します。上の刑事裁判の例で言えば，「無実の人を有罪にしてしまう危険を厳しく制限したうえで，真犯人を無罪にしてしまう危険をできるかぎり小さくする」という考え方です。

このことは，第１種の誤りのほうが第２種の誤りよりも「重大な」誤りである，と考えていることを意味します。最初の背理法との対比を見ればわかるように，仮説検定では，仮説を棄却することによって（思うような）結論が得られたと判断し，その結果何か行動を起こす，という考えをとっています。したがって，「誤った根拠にしたがって行動を起こす」ことは，「判断を誤った結果，行動を起こさない」ことよりも重大な失敗だといえます。

$\alpha$ を**有意水準**といい，0.05(5%) という値がもっともよく用いられます。より厳密な検定では 0.01(1%) を用いることもあります。また，母数の真の値を $\theta$ とするときの，第２種の誤りを犯す確率を $\beta(\theta)$ とすると，$P(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ は「母数の真の値を $\theta$ とするとき仮説を棄却する確率」で，**検出力**（または検定力）といいます。検出力は $\theta$ の関数ですから，その意味で**検出力関数**（または検定力関数）という言い方をすることもあります。つまり，「よい検定」とは，有意水準を一定の値とするとき，検出力関数をより大きくする検定であるということになります。

---

## 尤度比検定

具体的に検定のやり方を求める方法のひとつとして，ここでは**尤度比検定**という方法を説明します。ある母数 $\theta$ がある値をとっているとき，その母集団から取り出した標本 $X$ の値が $x$ である確率（確率密度）を $f(x;\,\theta\,)$ とします。このとき，サイズ $n$ の標本の値が $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ であったとすると，尤度関数は

$$L(\theta) = f(x_1;\theta) \cdot f(x_2;\theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n;\theta) \tag{1}$$

となります。各標本は独立ですから，尤度関数は，標本の値が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ となる確率（確率密度）を各々の $\theta$ について求めたものになります。

[1] $\alpha$ と $\beta$ のことを，俗に「『あわて者の誤り』の $\alpha$，『ぼんやり者の誤り』の $\beta$」といいます。

ここで，尤度関数を，標本を表す確率変数 $X$ と母数 $\theta$ の関数 $L(X,\theta)$ と考えます。さらに，$\theta=\hat{\theta}$ を，$L(X,\theta)$ を最大にする $\theta$，すなわち $\theta$ の最尤推定値とし，尤度の最大値を $L(X,\hat{\theta})$ とします。

さて，母集団に対してある帰無仮説をたてます。そして，その仮説が正しいとしたときの $\theta$ の最尤推定値を $\hat{\theta}'$ とし，そのときの尤度関数の値（つまり，仮説が正しいとしたときの尤度の最大値）を $L(X,\hat{\theta}')$ とします。ここで，$L(X,\hat{\theta})$ のほうは，$L$ の可能な最大の値ですから，$L(X,\hat{\theta}')$ は $L(X,\hat{\theta})$ を上回ることはありません。

では，これらの２つの尤度の比，すなわち

$$\lambda=\frac{L(X,\hat{\theta}')}{L(X,\hat{\theta})} \tag{2}$$

が非常に小さい，すなわち「$L(X,\hat{\theta}')$ が $L(X,\hat{\theta})$ に比べて極めて小さい」とき，これは何を意味するのでしょうか？

それは,「帰無仮説が正しいとすると，今得られているような標本が得られる確率（確率密度）は，帰無仮説を考えないときに比べて極めて小さい」ということです。

しかし，その標本は現に得られています。ということは，帰無仮説が正しいとすると,「今起きていることは，極めて珍しい事態である」と考えざるを得なくなります。このことから,「そんな無理のある考えをとるよりも，帰無仮説は間違っていると考える，すなわち仮説を棄却するほうが妥当である」と結論します。これが尤度比検定の考え方です。

では，$\lambda$ が「どのくらい」小さかったら，仮説を棄却すればよいのでしょうか？ それは,「$\lambda$ が $\lambda_0$ 以下である確率が $\alpha$」であるような $\lambda_0$ を選んで，$\lambda$ が $\lambda_0$ 以下であるとき，仮説を棄却するということにします。こうすると，帰無仮説が正しいとき，$0\leq\lambda\leq\lambda_0$ である確率が $\alpha$ です。つまり，帰無仮説が正しいのに間違って棄却してしまう確率が，$\alpha$ ということになります。この，$0\leq\lambda\leq\lambda_0$ という区間を**棄却域**といいます。

具体的な例で，尤度比検定がどのように使われるかを見てみましょう。いま，母集団は母分散が $\sigma^2$ の正規分布にしたがうとします。このとき,「母平均 $\mu=\mu_0$ である」という帰無仮説 $H_0:\mu=\mu_0$ に対する検定を行います。この母集団において，標本のひとつの値が $x$ となる確率密度は

$$f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{3}$$

となります。さて，現実に得られた標本を $x_1,x_2,\ldots,x_n$ とすると，尤度関数 $L(X,\mu)$ は

$$L(X,\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{4}$$

となります。

まず，帰無仮説 $H_0$ を仮定しないときの，$\mu$ の最尤推定量を求めてみましょう。以前説明したとおり，$\log L(X,\mu)$ が最大になる $\mu$ の値を求めるため，$\log L(X,\mu)$ を $\mu$ で微分して 0 とおき，$\mu$ の最尤推定量

$\hat{\mu}$ を求めます。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\mu}\log L(X,\mu) &= \frac{\partial}{\partial\mu}\log\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\mu}\left[\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n + \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu)\cdot(-1) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となり，これを 0 に等しいとおいて解くと，$\hat{\mu}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ ，すなわち標本平均 $\bar{X}$ となります。したがって，$L(X,\hat{\mu})$ は

$$
L(X,\hat{\mu}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{6}
$$

となります。

一方，帰無仮説 $H_0$ が正しいときは，帰無仮説で $\mu=\mu_0$ と決めたわけですから，推定するまでもなく，$\hat{\mu}'=\mu_0$ です。よって $L(X,\hat{\mu}')$ は

$$
L(X,\hat{\mu}') = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{7}
$$

となりますから，これらから尤度比 $\lambda$ を求めると

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{L(X,\hat{\mu}')}{L(X,\hat{\mu})} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\right\}} \\
&= \exp\left[\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\right\} - \left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\right\}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(2(\bar{X}-\mu_0)x_i-(\bar{X}^2-\mu_0^2)\right)\right\}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{2(\bar{X}-\mu_0)n\bar{X}-(\bar{X}^2-\mu_0^2)\right\}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X}-\mu_0)^2\right]
\end{aligned}
\tag{8}
$$

となります。ここで $n$ と $\mu_0$，$\sigma^2$ はすでに定まった数ですから，(8) 式は，$\lambda$ と $\bar{X}$ の関係を表しています。上述のように，棄却域を $0\le\lambda\le\lambda_0$ とすると，この式から，それに対応する $\bar{X}$ の区間は，図 1 の矢印 (1)(2) に示される範囲になります。よって，$\bar{X}$ がこの範囲に入る確率が，有意水準 $\alpha$ になるようにすれば，その有意水準に対応する棄却域が求められます。(8) 式の確率密度関数のグラフは左右対称ですから，$\bar{X}$ が矢印 (1) の範囲に入る確率が，$\alpha/2$ になるようにすればよいことになります。

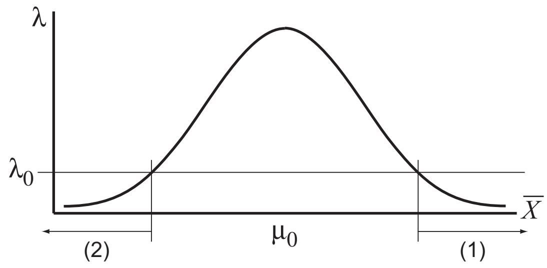


図 1: 棄却域

具体的に $\bar{X}$ の区間を求めるため，(8) 式を

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2\right] \tag{9}$$

と変形すると，$\lambda'$ は，標準正規分布の確率密度関数になっています。したがって，

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{10}$$

とおくと，$Z$ は標準正規分布にしたがうことがわかります。そこで，例えば $\alpha/2 = 0.025$ とします。「$Z$ が $z_{0.025}$ 以上である確率が 0.025」となるような値（上側 2.5 パーセント点）$z_{0.025}$ を考えると，この値は，数表から 1.96 となります。すなわち，「$\bar{X}$ が矢印 (1) の範囲に入る確率が 0.025」であるとき，「(10) 式の $Z$ が 1.96 以上になる確率が 0.025」ということになります。したがって，「$Z$ が 1.96 以上または $-1.96$ 以下のとき，帰無仮説 $H_0$ を棄却する」というのが，尤度比検定の考え方によって導かれる検定のやりかたになります。

## 仮説検定と区間推定

上の結論は，「$Z$ が 1.96 以上または $-1.96$ 以下となる確率は 5%」（だから，そのときは帰無仮説 $H_0$ を棄却する）ということですから，裏を返せば「$-1.96 \leq Z \leq 1.96$ である確率は 95%である」，すなわち

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right) = 0.95 \tag{11}$$

であることを意味します。(11) 式から，「$\mu_0$ を含んでいる確率が 95%であるような区間」，つまり $\mu_0$ の 95%信頼区間を導くことができます。すなわち，区間推定と検定とは，表裏一体にあることがわかります。