2012年度春学期　応用数学（解析）　第１５回

第５部・測度論ダイジェスト／　ルベーグ積分

積分に対する疑問—解決したのか？

前回の講義で，定積分 $\int_p^q f(x)dx$ から，p と q の間にあるすべての（可算無限個の）有理数に対応する幅 0 の線を抜き取っても，定積分の値（グラフの下の面積）は変わらない，ということをお話ししました。その説明では，可算無限個の有理数の集合はルベーグ測度が 0，すなわち零集合だから，というものでした。

一方，高校以来学んできた積分（リーマン積分）は「積分区間を有限個の区間に分ける」という操作にもとづいています。そこで，上で抜き取った可算無限個の有理数に対応して

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases} \tag{1}$$

という関数（ディリクレ関数）[1]を考えると，積分区間をいくら細かく分割しても，各分割には有理数も無理数も必ず含まれますから，前回説明したジョルダン外測度は 1，ジョルダン内測度は 0 となります。つまりこの関数の積分はジョルダン可測ではなく，区分求積法では積分の値が確定しません。すなわち，リーマン積分は不可能です。

このことは，ルベーグ測度にもとづいた新しい積分の定義が必要であることを示唆しています。これが**ルベーグ積分**です。

ルベーグ積分の考え方

リーマン積分では，関数 $y = f(x)$ の x のほう（定義域）を分割していました。これに対してルベーグ積分では，y のほう（値域）を分割します。

分割点を $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ とするとき，ある y_i に対して定義域に集合 $A_i = \{a | y_i \leqq f(a) < y_{i+1}\}$ を考えて，「$y_i \times A_i$ の測度」を求めます。これを各 y_i について求めて合計したものの，分割を細かくしたものの極限を，$f(x)$ のルベーグ積分と考えます。

この方法では，集合 A_i がルベーグ可測であれば，積分を求めることができます。集合 A_i がたとえ可算無限個の部分に分かれていたとしても，ルベーグ可測であれば測度に完全加法性がありますから，大丈夫です。

リーマン積分では，関数の性質に関係なく，定義域を有限個に分けていました。そのため，ディリクレ関数のような特別な関数には対応できなくなってしまいました。ルベーグ積分は，y の分割に対して，関数の形に応じて集合 A_i が対応するので，より広い範囲の関数に対応することができます。

---

[1] $h(x) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k})$ で表されます。

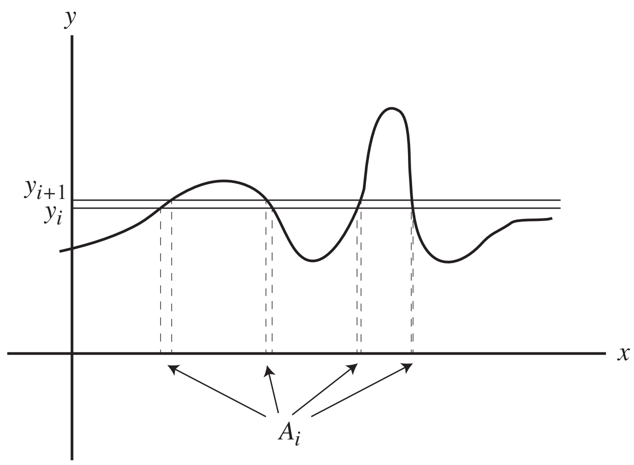

図 1: ルベーグ積分の考え方

単関数と可測関数

ルベーグ積分を考えるため，もとの関数を階段状の関数で近似することを考えます。集合 A に対して，A の**特性関数** $\varphi(x;A)$ を

$$\varphi(x;A)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases} \tag{2}$$

と定義します。

$A_1,A_2,\ldots,A_n$ を互いに共通部分をもたない可測集合列とし，$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ とします。このとき，

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(x;A_i) \tag{3}$$

で表される関数を**単関数**といいます。

単関数については，そのルベーグ積分を

$$\int_A\varphi(x)m(dx)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m(A_i) \tag{4}$$

で定義します。$m(A_i)$ は A_i のルベーグ測度です。

一般の関数 $f(x)$ についても，それが単関数の極限で表されるのなら，同様にルベーグ積分が定義できるはずです。それができるためには，単関数を階段状の関数として関数 $f(x)$ の形に合わせて近似するとき，そこに現れる集合 A_i がつねに可測集合である必要があります。

すなわち，任意の実数 a,b について，集合 $\{x|a\leqq f(x)<b\}$ が可測集合でなければなりません。このような関数を**可測関数**といいます。

可測関数のルベーグ積分

可測関数 $f(x) \geqq 0$ について，可測集合 A 上の $f(x)$ のルベーグ積分を

$$\int_A f(x)m(dx) = \sup \int_A \varphi(x)m(dx) \tag{5}$$

と定義します。ここでいう上限 (sup) は，「$0 \leqq \varphi(x) \leqq f(x)$ をみたすすべての単関数」にわたっての上限をさします。つまり，$f(x)$ を単関数で下から（内側から）近似したときの，もっともよい近似によって，積分が得られる，としています。

$f(x)$ が負の値もとるときは，正の値をとるときと負の値をとるときに分けて，負の値をとる部分を正負反転して考えます。$f^+(x) = \max(f(x), 0)$，$f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ とすると，$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ となります。そこで，

$$\int_A f(x)m(dx) = \int_A f^+(x)m(dx) - \int_A f^-(x)m(dx) \tag{6}$$

と定義します。

このような単関数による近似で積分が定義できるのは，次の定理があるからです。

> $f(x)$ を可測関数とし，$f(x) \geqq 0$ とする。このとき，単関数の増加列
>
> $$0 \leqq \varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x) \leqq \cdots \tag{7}$$
>
> が存在して
>
> $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{8}$$
>
> がなりたつ。

これを証明するために，n を自然数として

$$\begin{aligned} A_k^{(n)} &= \left\{ x \middle| \frac{k}{2^n} \leqq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1) \\ A^{(n)} &= \{x | f(x) \geqq n\} \end{aligned} \tag{9}$$

とおきます。これは，前々節で述べた「値域のほうを分割する」ことに相当します。

$f(x)$ は可測関数なので，$A_k^{(n)}, A^{(n)}$ は可測集合です。これらの集合は，互いに共通部分がなく，かつそれらの結びが $f(x)$ の定義域全体に対応しています。そこで，単関数 $\varphi_n(x)$ を

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\varphi(x; A_k^{(n)}) + n\varphi(x; A^{(n)}) \tag{10}$$

とおくと，関数列 $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\}$ は (7) 式の単調増加性を満たしています。

一方，ある自然数 N について，$f(x)$ の $f(x) < N$ となる部分については，$n \geqq N$ のとき (9) 式の上の式から

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = \frac{1}{2^n} \tag{11}$$

となります。また，$f(x) = +\infty$ [2]のところでは $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty$ となります。このことは，各点 x で $\varphi_n(x)$ が $f(x)$ に収束（各点収束）することを意味しています。■

[2]ルベーグ積分論では，このように無限大を数として扱う記述が便利なのでよく用いられます。

再び最初の問題へ，そして発展

以上の議論をふまえて，最初の「ディリクレ関数 $h(x)$ の積分」の問題を考えてみます。この関数は，有理数全体を $\boldsymbol{Q}$，実数全体を $\boldsymbol{R}$ であらわすと，

$$h(x) = 1 \times \varphi(x; \boldsymbol{Q}) + 0 \times \varphi(x; \boldsymbol{R} \backslash \boldsymbol{Q}) \tag{12}$$

という単関数になり，$\boldsymbol{Q}$ のルベーグ測度 $m(\boldsymbol{Q})$ は 0 ですから，任意の積分区間で $h(x)$ の積分は 0 となります。

今回の説明では，最初の問題との関連から，1 次元関数を想定していました。しかし，今回説明したルベーグ積分の定義では，定義域が 1 次元の実数値である必要はないことがわかると思います。実際，ルベーグ積分は「ルベーグ可測な集合に対して定義された可測関数」について組み立てられています。可測集合とは数の集まりだけではなく，例えば，「事象の集合」とそれに対応する確率という測度で定義することもできます。これについては，私の講義「解析応用」で説明しています。