2013 年度秋学期　解析応用　第５回

第１部・フーリエ解析／　デルタ関数とフーリエ変換

「ひとつの波」のフーリエ変換

フーリエ級数の考え方は，周期関数を三角関数（指数関数）の足し合わせで表した時，それぞれの三角関数（指数関数）がどれくらい含まれているか（波の振幅がどのくらいか）を求めよう，というものです。そして，フーリエ変換は，対象を非周期関数に拡大した場合でも，各周波数の三角関数（指数関数）の振幅を，周波数空間における関数で表したものです。

では，周波数 ν_0 の指数関数 $f(x)=\exp(i2\pi\nu_0 x)$「だけ」をフーリエ変換すると，どうなるでしょうか。フーリエ級数の考え方からすると，ひとつの指数関数はそのまま，項がひとつだけのフーリエ級数になっています。しかし，フーリエ変換の定義からは

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi\nu_0 x)\exp(-i2\pi\nu x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi(\nu_0-\nu)x)dx \end{aligned} \tag{1}$$

となりますが，この積分は明らかに収束しません。そもそも，$\exp(i2\pi\nu_0 x)$ は絶対可積分ではありませんから，フーリエ変換は求められません。

これはおかしなことです。フーリエ変換がフーリエ級数を自然に拡張したものであるならば，周波数 ν_0 の指数関数のフーリエ変換は，「周波数 ν_0 のみに値をもつ関数」になるはずです。

ディラックのデルタ関数は，この「周波数 ν_0 のみに値をもつ関数」をうまく定義したものです。これを使うと，絶対可積分でない関数にもフーリエ変換を拡張することができます。

デルタ関数

デルタ関数 $\delta(x)$ は「単位インパルス関数」ともいわれ，要は「$x=0$ にのみにピークをもち，他はゼロ」という関数です。$\delta(x)$ の定義にはいろいろありますが，その本質は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{2}$$

という性質にあります。つまり，$\delta(x)$ は「積分することによって $f(x)$ から $f(0)$ を切り出す」関数です。

ここで，$f(x)$ として「恒等的に 1」という関数を考えると，$f(0)$ も当然 1 ですから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{3}$$

が得られます。また，(2) 式の右辺は $x=0$ 以外の $f(x)$ の値に無関係であることから，$\delta(x)=0 (x\neq 0)$ が導かれます。よって，最初に述べた「$x=0$ にのみにピークをもち，他はゼロ」という理解が導かれます。

これらの式で用いている積分は，通常の意味の積分ではありません。$x=0$ 以外ですべて 0 の関数を，全実数にわたって積分すれば，それは 0 になるはずです。ここでの積分は，デルタ関数とはこういうものだと述べるために用いています[1]。

[1] これが「超関数」の考えの第一歩になります。

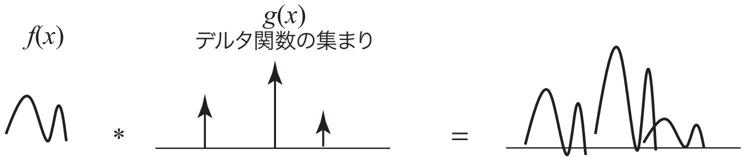

図 1: コンヴォリューションのデルタ関数による理解

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta((x-T)-y)dy \tag{4}$$

を考えます。明らかに $\delta(x)=\delta(-x)$ で，$y-(x-T)=t$ と変換すると $dy=dt, y=t+(x-T)$ なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta((x-T)-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+(x-T))\delta(t)dt \tag{5}$$

となり，(2) 式からこれは $f(x-T)$ に等しいことがわかります。この関係は，$f(x-T)$ **は「$f(x)$ と，T だけシフトされたデルタ関数 $\delta(x-T)$ とのコンヴォリューション」に等しい**ことを示しています。

このことから，コンヴォリューションの意味あいが理解できます。$f(x)$ と $g(x)$ のコンヴォリューション $[f*g](x)$ を考える時，$g(x)$ がデルタ関数の組み合わせでできているのなら，$[f*g](x)$ は「$g(x)$ を構成している各デルタ関数のピークの位置に，$f(x)$ のコピーを貼り付けたもの」ということができます（図 1）。

デルタ関数とフーリエ変換

デルタ関数に関する上記の関係から，デルタ関数 $\delta(x)$ を定義通りフーリエ変換すると，

$$\begin{aligned} FT[\delta(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\exp(-i2\pi\nu x)dx \\ &= \exp(-i2\pi\nu x)\big|_{x=0} = 1 \end{aligned} \tag{6}$$

となります。このことは，実空間でのデルタ関数，すなわち「瞬間的ピーク」は，「全周波数を一様に含む」ことを示しています。同様に，

$$\begin{aligned} FT^{-1}[\delta(\nu)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu)\exp(i2\pi\nu x)dx \\ &= \exp(i2\pi\nu x)\big|_{\nu=0} = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

ですから，$FT[1]=\delta(\nu)$ です。このことは，実空間で一様な値をとる定数関数は，周波数空間では「周波数 0 にたつピーク」にあたることを示しています。

さらに，前回説明した「シフト」に関する定理，すなわち $FT[f(x)\exp(i2\pi\nu_0 x)] = F(\nu-\nu_0)$ で $f(x)\equiv 1$ とすると，上の関係から $FT[\exp(i2\pi\nu_0 x)] = \delta(\nu-\nu_0)$ となります。これが，最初に述べた「波のフーリエ変換」に対する答えで，たしかに周波数 ν_0 にピークがたつことになります。

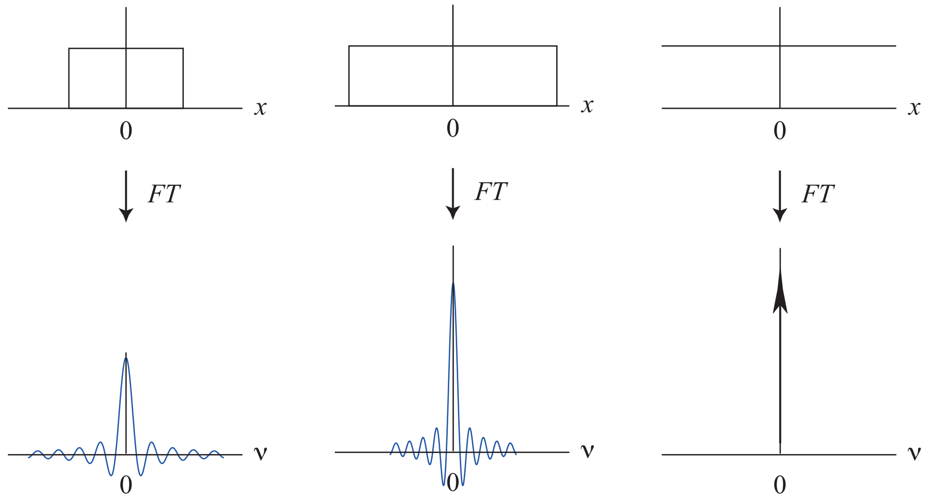

図 2: 矩形関数のフーリエ変換とデルタ関数

矩形関数とデルタ関数

前回，矩形関数 $\mathrm{rect}(x)$，すなわち

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & |x| < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{8}$$

のフーリエ変換が，$\mathrm{sinc}(\nu) = \dfrac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ であることを説明しました。ここで，$\mathrm{rect}(\dfrac{x}{a})$ を考えると，その定義は

$$\mathrm{rect}(\frac{x}{a}) = \begin{cases} 0 & |\frac{x}{a}| > \frac{1}{2} \\ 1 & |\frac{x}{a}| < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{9}$$

ですから，

$$\mathrm{rect}(\frac{x}{a}) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{a}{2} \\ 1 & |x| < \frac{a}{2} \end{cases} \tag{10}$$

となります。一方，フーリエ変換の「拡大・縮小」に関する定理に $\mathrm{rect}(\dfrac{x}{a})$ を当てはめると，$FT[\mathrm{rect}(\dfrac{x}{a})] = a\mathrm{sinc}(a\nu)$ となります。

したがって，$a \to \infty$ の極限を考えると，$\mathrm{rect}(\dfrac{x}{a})$ は幅が実数全体に広がって「恒等的に 1」になります。一方，$a\mathrm{sinc}(a\nu)$ の $a \to \infty$ の極限は，$\mathrm{sinc}(\nu)$ を左右から押しつぶして，ピークの高さが無限に大きくなっていく形になります。上述の通り，「恒等的に 1」の関数のフーリエ変換はデルタ関数ですから，デルタ関数を sinc 関数の極限として理解することができます（図 2）。

ただし，デルタ関数を「高さが無限のピーク」と理解するのはよくないと思います。「無限」といってしまうと，$\delta(x)$ の 2 倍である $2\delta(x)$ などを考えることができません。デルタ関数の重要な性質は，あくまで (2) 式で述べたものです。

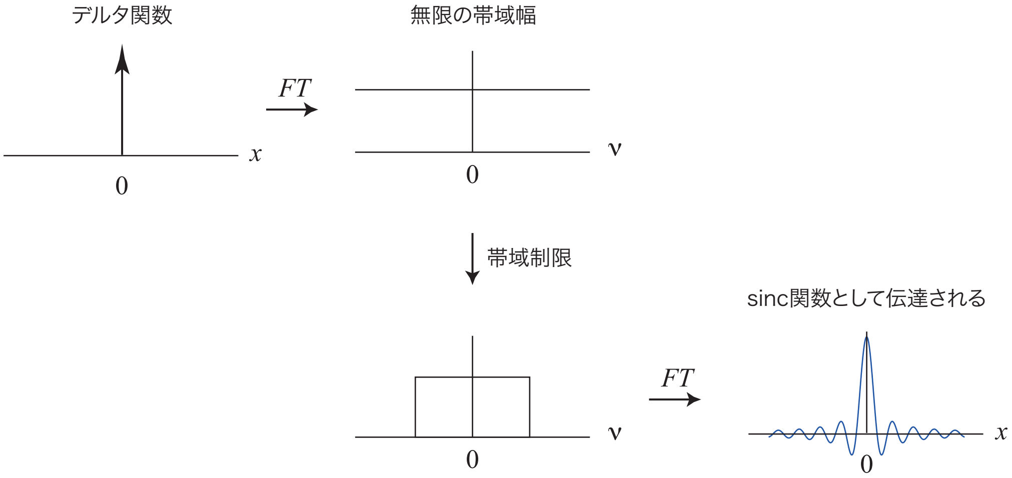

図 3: 有限の帯域幅によるデルタ関数の伝達

帯域制限とは

矩形関数のフーリエ変換を使って，信号処理における「帯域制限」の問題を考えることができます。

物理現象による情報の伝送路においては，それが空気の振動による音の伝導であれ，電気的なものであれ，光学的なものであれ，無限の周波数の幅（帯域幅）を伝達できることはありません。デルタ関数の伝達には無限の帯域幅を要するため，物理的な伝送路で伝えることはできません[2]。

たとえば，ある物体の像を伝達するとします。物体の各点をデルタ関数と考えると，それぞれのデルタ関数は周波数空間では「恒等的に 1」の定数関数で表されますから，この関数を表すのに無限の帯域幅が必要です。これを有限の帯域幅で表すことは，周波数空間で矩形関数をかけることに相当します。これを逆フーリエ変換して実空間に戻すと，上述の通り sinc 関数になります（図 3）。

つまり，元の 1 点が，伝達路を通ると 1 点に写像されず，sinc 関数に写像されてしまうのです。これが帯域制限による影響で，画像の場合は「ぼけ」に相当します。

参考文献

上記のほか，信号伝達に関する応用については，私の「画像情報処理」(2013 年度春学期)・第 1 部を参照してください。

[2]伝達できなかった帯域を推定する方法はあり，超解像とよばれています。