2013年度秋学期　解析応用　第６回演習の解答例

1. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx \tag{1}$$

と表すことにします。$f(x)$ が実関数とすると，

$$\begin{aligned}F(\nu)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\cos 2\pi\nu x - i\sin 2\pi\nu\right)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 2\pi\nu x dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin 2\pi\nu x dx\end{aligned} \tag{2}$$

と表せるので，

$$\begin{aligned}F(-\nu)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 2\pi(-\nu)x dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin 2\pi(-\nu)x dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 2\pi\nu x dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin 2\pi\nu x dx\end{aligned} \tag{3}$$

となります。すなわち，$\mathfrak{Re}F(\nu)=\mathfrak{Re}F(-\nu)$，$\mathfrak{Im}F(\nu)=-\mathfrak{Im}F(-\nu)$ となります（$\mathfrak{Re}$，$\mathfrak{Im}$ は，それぞれ実部，虚部を表します)。つまり，実部は偶関数，虚部は奇関数となります。

このことは，実関数をフーリエ変換すると，周波数の実部・虚部とも正の部分の値だけが決まれば，他の値はすべて決まってしまうことを示しています。したがって，定義域が実数から複素数になっても，情報の量がふえているわけではありません。

2. 講義第４回のプリントの３ページ「拡大・縮小」のとおりです。

3. 講義第５回のプリントの２ページにある通り $FT[1]=\delta(\nu)$ ですから，フーリエ変換の線形性（第４回プリントの (8) 式）から $FT[a]=a\delta(\nu)$ となります。

4. 講義第４回のプリントの３ページ「シフト」のとおりです。「実空間での移動」が「周波数空間での位相のずれ」になることを表しています。