2013 年度秋学期　解析応用　第８回演習の解答例

1. $A_1 = \Omega, A_i = \emptyset\ (i = 2, 3, \ldots)$ とすると，$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \emptyset \cup \ldots$ で，確率測度の定義の条件 3 より $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$ です。よって $\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$ で，$P(\cdot) \geqq 0$ だから $P(\emptyset) = 0$ となります。

2. $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset\ (i = 3, 4, \ldots)$ とすると，同様に条件 3 より $P(A \cup B \cup \emptyset \cup \ldots) = P(A) + P(B) + \sum_{i=3}^{\infty} P(\emptyset)$ で，$P(\emptyset) = 0$ ですから証明されました。

3. $A \cap A^c = \emptyset$ なので，$B = A^c$ とおけば上の式にあてはめられ，$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ となります。$A \cup A^c = \Omega$ で $P(\Omega) = 1$ ですから，証明されました。

4. $A \subset B$ のとき $B = A \cup (B - A)$ です。$A \cup (B - A) = \emptyset$ なので, 上の式から $P(B) = P(A) + P(B - A)$ となり，$P(\cdot) \geqq 0$ だから $P(A) \leqq P(B)$ となります。

5. $A \cup B = A \cup (B - A)$ で, $A \cap (B - A) = \emptyset$ なので, この問題の２番から $P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$ です。一方，$B = (B - A) \cup (A \cap B)$ で，$(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$ なので，同様に $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$ です。この両式を辺々引き算すると，$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$ となり，証明されました。