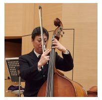
2016年度秋学期　応用数学（解析）　第３回

第1部・「無限」の理解

実数とは何か

浅野　晃
関西大学総合情報学部



拡張されていく「数」

拡張されていく「数」

実数

…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …

整数　自然数

有理数

…, 2/3, 1/2, 1/3, …　有限小数と循環する無限小数

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$　π, e　循環しない無限小数

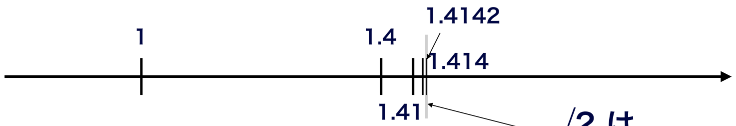
無理数

今日扱うのは
「実数の連続性を示す方法」
いくつか挙げますが，どれも等価です

無限小数と カントールの公理

点と区間

「循環しない無限小数」は，
数直線上の一つの「点」なのか？

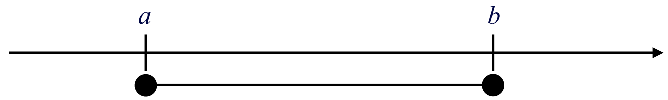


√2 は
本当に「点」か？
よくわからない…

点ではなく［区間］で考える

閉区間と開区間

$a < b$ のとき，
a と b の間にある数の集合→［区間］

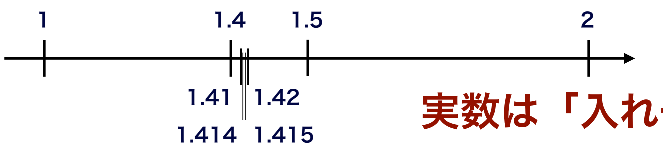


両端を含む　［閉区間］$[a, b]$
最小値はa，最大値はb

両端を含まない　［開区間］(a, b)
最小値・最大値が存在するかどうかは，数の種類による

カントールの公理

循環しない無限小数 √2 = 1.4142135…
無限に桁数を増やすと，
ひとつの実数を表せるのか？



実数は「入れ子」の
閉区間の極限

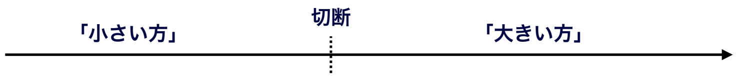
$[1, 2]$
$[1.4, 1.5]$
$[1.41, 1.42]$
$[1.414, 1.415]$
⋮
その極限が√2 = 1.4142135…

実数と
デデキントの切断

デデキントの切断

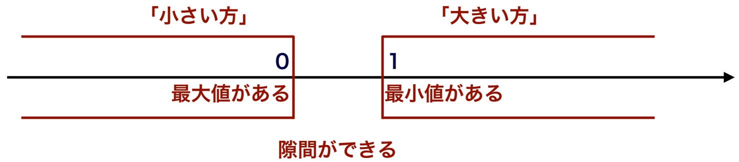
数直線を，ある場所で切断し，
数の集合を「大きい方」と「小さい方」
にわける

（ある集合の）すべての数を，
一方の組のどの数も
もう一方の組のどの数よりも小さくなるように，
２つの組に分ける



整数の切断

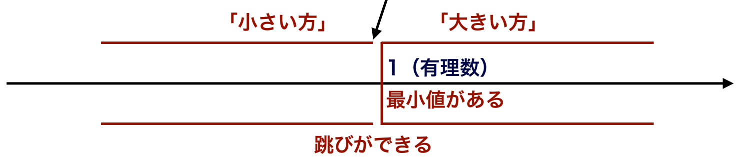
整数の場合



有理数の切断

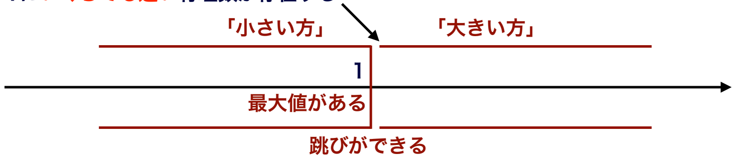
有理数の場合

「小さい方」の最大値がない
1よりも小さく
1にいくらでも近い有理数が存在する



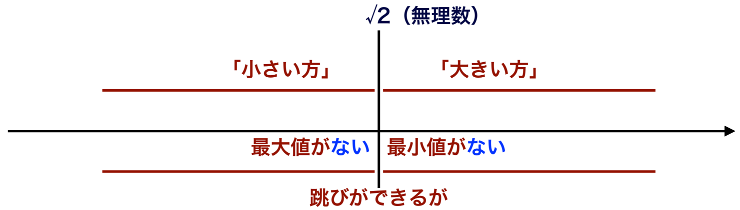
[稠密性]

「大きい方」の最小値がない
1よりも大きく
1にいくらでも近い有理数が存在する



有理数の切断

有理数の場合
こういう場合もある



√2よりも小さく
√2にいくらでも近い有理数も

√2よりも大きく
√2にいくらでも近い有理数も

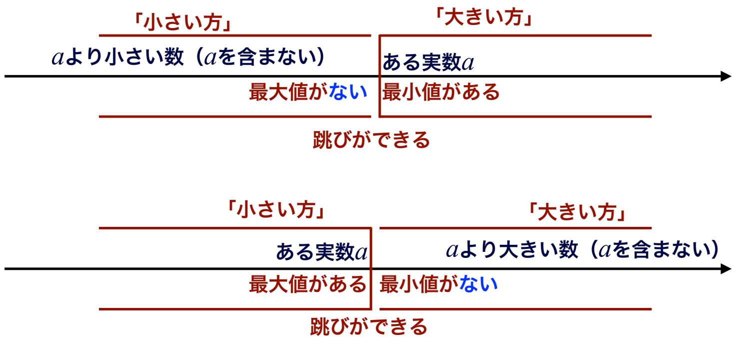
どちらも存在する

「稠密」とは，
いくらでも細かく
「びっしり」と
毛の植わっている
ブラシのようなもの

実数の切断

実数は，必ずこのどちらかになる

稠密な上に
[連続性]



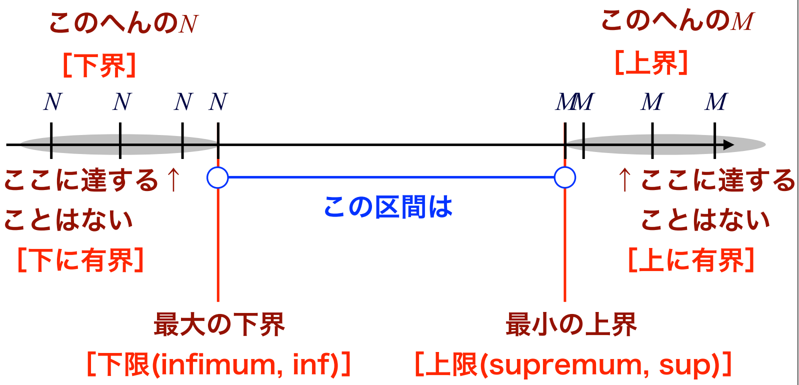
実数とは，「切断の切り口」である

「連続」とは，「べったり」と塗り付けられた塗料のようなもの

上限と下限
ワイエルシュトラスの定理

有界，上界・下界，上限・下限

開区間には最大値も最小値もないが，
上にも下にも限界はある



ワイエルシュトラスの定理

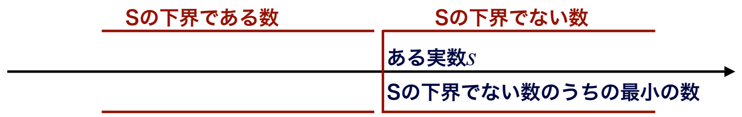
実数からなる集合が下（上）に有界ならば
必ず下限（上限）が存在する　デデキントの切断から導ける

実数からなるある集合Sが，下に有界とすると，

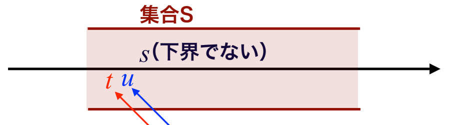
どちらかの切断を形成し，実数sが定まる。
下の切断なら，下限が存在する。上の切断にならないことを示す

ワイエルシュトラスの定理

こちらの切断だとすると



実数 s は，Sの下界でない数だから，集合Sを見ると



s より小さな数 t が，集合Sに属しているはず

s と t の間にある数 u も，集合Sに属しているはず

u は t より大きいから，u は「集合Sの下界ではない数」である

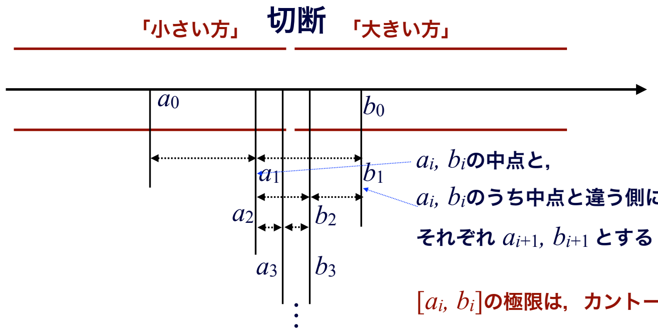
s は u より大きい。

これは，「s は 集合Sの下界ではない数のうちで最小」に矛盾

実数を定義する
各公理・定理間の関係

カントールの公理とデデキントの切断

カントールの公理によって定まる実数は，
デデキントの切断によって切り口に現れる実数と同じか？



a_i, b_iの中点と，

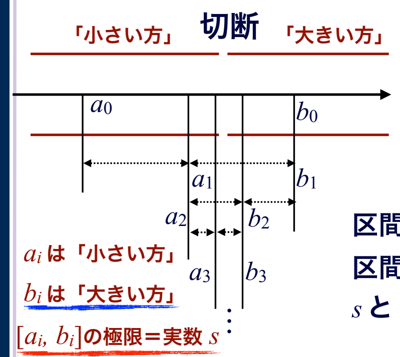
a_i, b_iのうち中点と違う側にある点を，

それぞれ a_{i+1}, b_{i+1} とする

$[a_i, b_i]$の極限は，カントールの公理により，１つの実数 s を定める

この s は，デデキントの切断による「切り口」にあるか？

カントールの公理とデデキントの切断



a_i は「小さい方」

b_i は「大きい方」

$[a_i, b_i]$の極限＝実数 s

実数 s が「小さい方」に属するとする

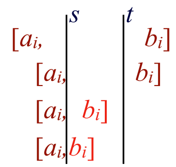
s より大きい数 t については

どんなに t が s に近くても

区間$[a_i, b_i]$がs に到達する途中で

区間の右端（「大きい方」）が

s と t の間に入るときがあるはず



s は「小さい方」の最大値である。

「大きい方」に最小値はない

t は「大きい方」に属する

実数の連続性を示すさまざまな公理

カントールの公理　実数は入れ子の閉区間の極限

デデキントの切断による公理

実数は切断の「切り口」

ワイエルシュトラスの定理

実数の集合が有界ならば，上限か下限がある

実数の有界な単調数列は収束する

（これは次回）

いずれも同値である

連続性裁判

～こんな数学，何か役に立つの？～

連続性裁判

映画の著作権

公開から50年後の年の年末まで有効

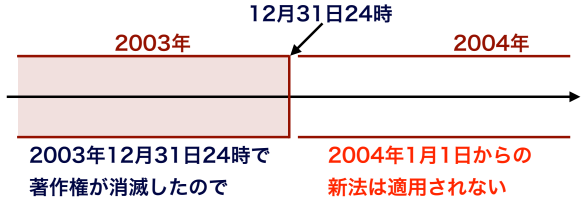
→2004年1月1日から「70年」に延長

1953年公開の映画の著作権は
50年後の2003年末で消滅？

連続性裁判

1953年公開の映画の著作権は

ビデオ業者の言い分

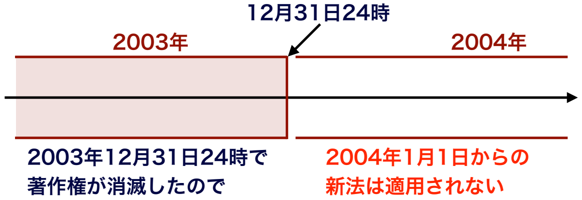


文化庁の言い分

裁判の結果は

「2003年12月31日24時」と「2004年1月1日0時」の
2つの名前が同じ時刻をさすことはない

ビデオ業者の
言い分



こちらが認められた。

「時の流れは連続」

今日のまとめ

実数の「連続性」

実数の連続性を示す方法

カントールの公理
デデキントの切断による公理
ワイエルシュトラスの定理