

2016年度秋学期 応用数学（解析） 第4回

第1部・「無限」の理解
収束とは何か, ε - δ 論法

浅野 晃
関西大学総合情報学部



微分を習ったときの説明

何かだまされている気がする

微分の説明

関数 $f(x) = x^2$ の微分

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} && h \text{ はゼロに近づいているだけで,} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} && \text{ゼロではないから,} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x && \text{分母分子を } h \text{ で割る} \end{aligned}$$

やっぱり h はゼロ

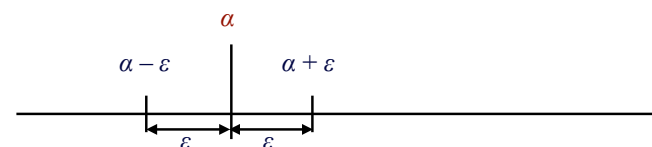
これっておかしくありませんか？

収束 = 「限りなく近づく」 ことの意味

数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

α のまわりにどんなに狭い区間
 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ を設定しても ($\varepsilon > 0$)



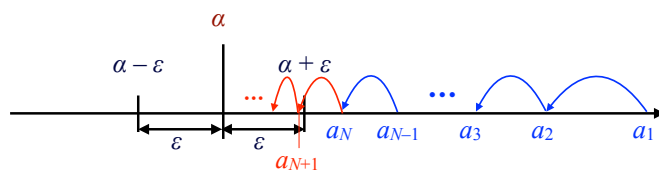
2016

数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については,
 a_n はみなその狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ に入る



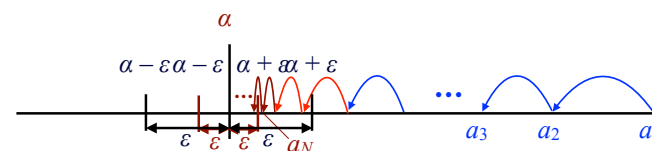
2016

数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については,
 a_n はみなその狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ に入る



ε をどんなに小さくしても そういう N がある

2016

数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

α のまわりにどんなに狭い区間
 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ を設定しても ($\varepsilon > 0$)

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については、
 a_n はみなその狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ に入る

$\varepsilon - N$ 論法

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

数列の発散の定義

数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散する

どんなに大きな数 G を持ってきても,

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については、
 a_n はみな G より大きくなる

$$\forall G, \exists N; n > N \Rightarrow a_n > G$$

収束や発散は「無限」なのか

「無限」とはひとつも言っていない

どんなに狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$

どんなに大きな数 G

十分大きな番号 N

どれも「無限」ではなく有限

ただし、求めに応じて

好きなだけ狭く・大きくできる

実数の連続性と収束

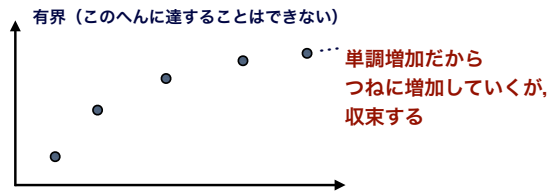
実数の連続性と収束

実数の連続性を述べる公理の、4つめの表現
実数の有界な単調数列は収束する

数列 $\{a_n\}$ が

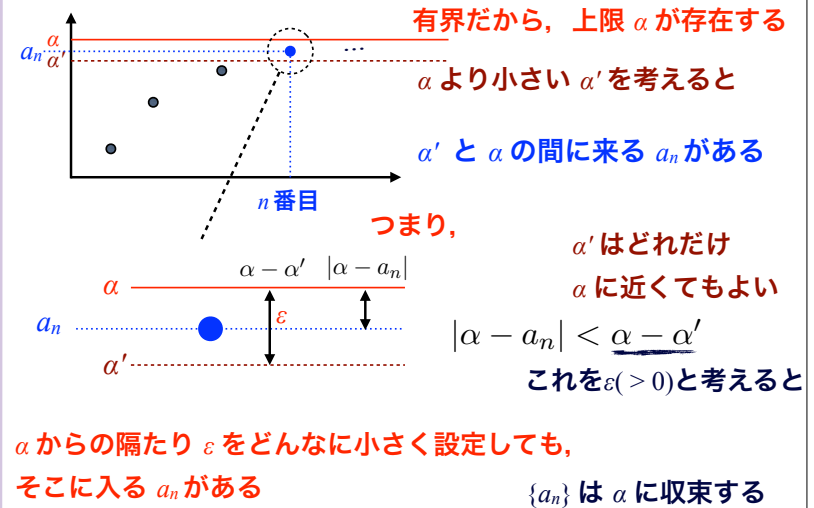
「単調増加」とは、 $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$

「単調減少」とは、 $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$



2016

ワイエルシュトラスの定理から証明



2016

数列の収束に関する例題

例題

$a > 0$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ を証明せよ。

$\frac{a^k}{k!} = C$ と置く。番号 k は、 $k > 2a$ であるとする。

$n > k$ となる番号 n について、

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \dots \times \frac{a}{n} \\ &= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \dots \times \frac{a}{k+(n-k)} \end{aligned}$$

2016

例題

$n > k$ となる番号 n について,

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n}$$

$$= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)}$$

$k > 2a$ なので

$$\frac{a^n}{n!} < C \times \frac{a}{2a-k} \times \frac{a}{2a-k} \times \cdots \times \frac{a}{2a-(n-k)}$$

$$< C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C \cdot 2^k}{2^n} < \frac{C \cdot 2^k}{n}$$

そこで, どんな小さな $\varepsilon (> 0)$ についても,
番号 n が $n > \frac{C \cdot 2^k}{\varepsilon}$ であれば $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$

つまり
 $\{a^n/n!\}$ は 0 に
収束する

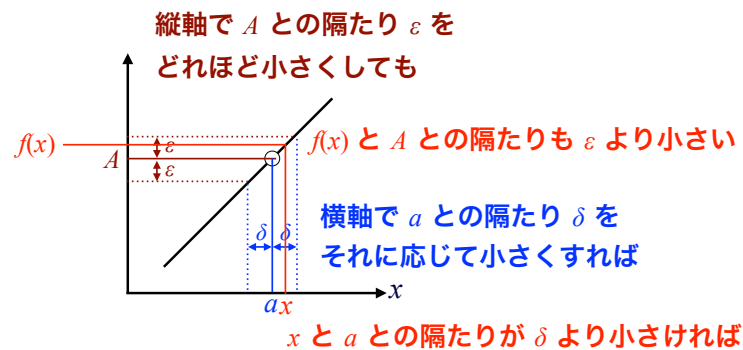
関数の極限

関数の極限

数列の収束と同じ論法を用いる

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ の極限が A であるとは



関数の極限

どんなに小さな ε を考えても ($\varepsilon > 0$)

x と a との隔たりを δ より小さくすれば

$f(x)$ と A の隔たりも ε より小さくできる

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\varepsilon - \delta$ 論法

ε も δ も, ただの正の数で, 0 ではないし,
0 に「無限に」近づくわけでもない

最初の微分の例

$h \rightarrow 0$ と書いてあっても、
 h はあくまで正の数で、0ではない

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} && h \text{ はゼロに近づいているだけで,} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} && \text{ゼロではないから,} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x && \text{分母分子を} h \text{ で割る} \end{aligned}$$

やっぱり h はゼロ ではなくて

収束する先が $h=0$ を代入したときの値と同じ、というだけ

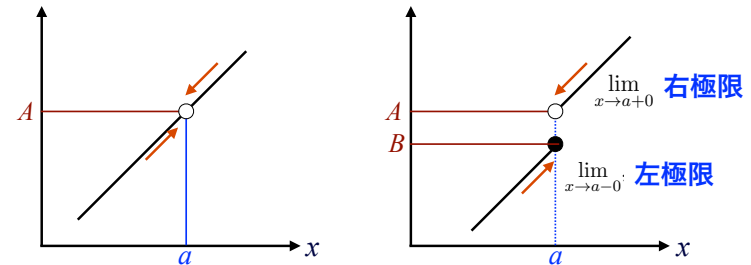
左極限と右極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ の極限が A であるとは

x が大きい方から a に近づいても

小さい方から a に近づいても、どちらの極限も A

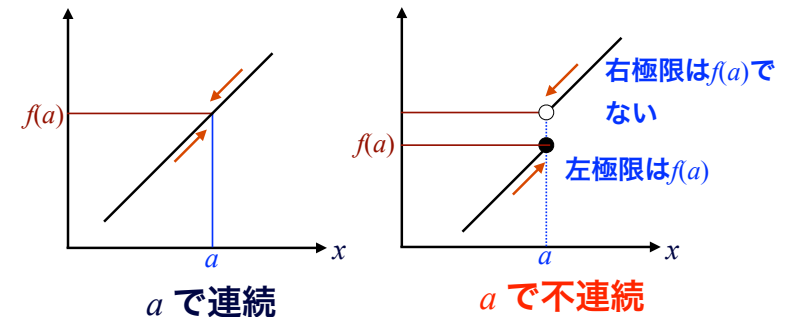


関数の「連続」と「一様連続」

関数の連続性

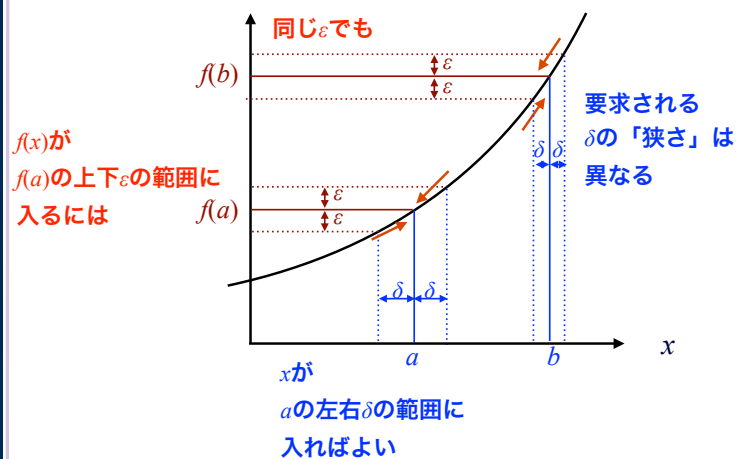
関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは

関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ の極限が $f(a)$ であること



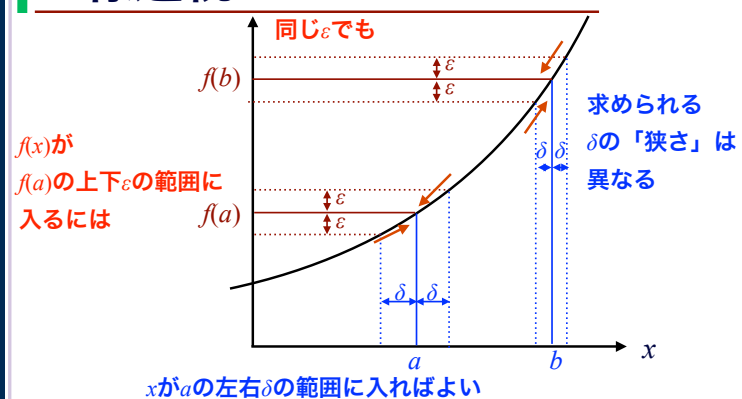
区間 I のどの点でも連続なら「区間 I で連続」

$\varepsilon - \delta$ 論法で話をすると



2016

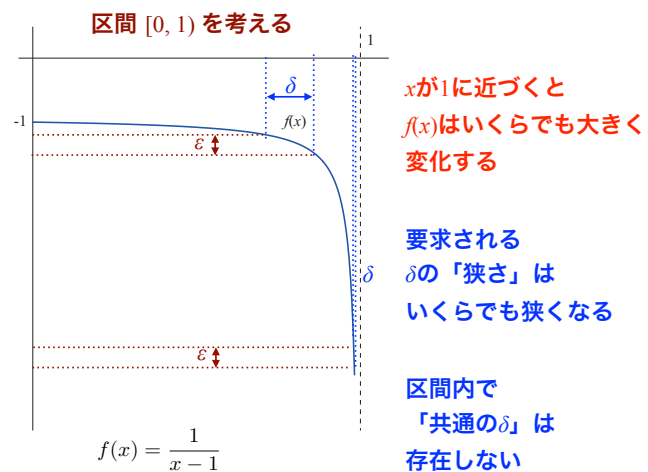
一様連続



この場合は「狭い方の δ 」をどこでも用いればよい
 どの点でも「共通の δ 」を用いれば連続といえるとき
 [一様連続] という

2016

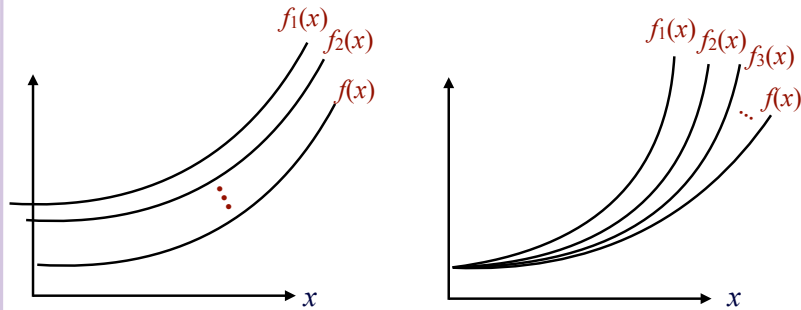
連続だが一様連続でない例



2016

関数列の収束

関数列の収束と「一様収束」



区間内の各点で、
 $f_n(x)$ と $f(x)$ の隔たりが
0に近づく
[各点収束]

左のほうでは収束していくが
いくらでも右に行けば
いつまでたっても
収束しない
[一様収束] でない

今日のまとめ

「限りなく近づく」とは、
「無限」ではない

求めに応じて
好きなだけ近くできること