

2016年度秋学期 応用数学（解析） 第6回

第2部・基本的な微分方程式
変数分離形の変形

浅野 晃
関西大学総合情報学部



変数分離形（復習）

変数分離形

一般には $g(x)x' = f(t)$

$x' = \frac{dx}{dt}$ とすると $g(x)dx = f(t)dt$

両辺それぞれを
積分すると $\int g(x)dx = \int f(t)dt + C$

一般解に含まれる積分定数 C は、
初期値を代入して定まり、特殊解が得られる

今日は、変形によって変数分離形に持ち込める方程式です

1. 同次形

同次形

一般には $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$ x/t の式になっている

$\frac{x}{t} = u$ とおくと $x = ut$ この両辺を微分 $\frac{dx}{dt} = t \frac{du}{dt} + u$
積の微分

よって $t \frac{du}{dt} + u = f(u)$

$$\frac{1}{f(u) - u} du = \frac{1}{t} dt$$

変数分離形になった

同次関数

関数 $M(x, t)$ が k 次の同次関数であるとは

$M(ut, t) = t^k M(u, 1)$ の形になっていること
 t^k をくくり出せる

微分方程式が $\frac{dx}{dt} = \frac{M(x, t)}{N(x, t)}$ の形で

M, N がどちらも k 次の同次関数なら, $x = ut$ とおいて

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{M(x, t)}{N(x, t)} \\ &= \frac{t^k M(u, 1)}{t^k N(u, 1)} = \frac{M(u, 1)}{N(u, 1)} = \frac{M\left(\frac{x}{t}, 1\right)}{N\left(\frac{x}{t}, 1\right)} \end{aligned}$$

前ページの
形になる

例題

$x' = \frac{t-x}{t+x}$ を解いて, 一般解を求めよ。

分母分子を t でわると $\frac{dx}{dt} = \frac{1 - \frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}}$ 同次形

$\frac{x}{t} = u$ とおくと $x = ut$ より $\frac{dx}{dt} = t \frac{du}{dt} + u$

よって $t \frac{du}{dt} + u = \frac{1-u}{1+u}$

$$\frac{1}{\frac{1-u}{1+u} - u} du = \frac{1}{t} dt \quad t \text{ と } u \text{ を分離}$$

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{t} dt$$

例題

$x' = \frac{t-x}{t+x}$ を解いて, 一般解を求めよ。

微分の関係に
なっている $\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{t} dt$

ここで $u^2 + 2u - 1$ の微分が $2(u+1)$ になるから,
上の式の両辺を積分すると

$$\frac{1}{2} \log(|u^2 + 2u - 1|) = -\log|t| + C$$

$$\log(|u^2 + 2u - 1|) = \log(A|t|^{-2})$$

$$t^2(u^2 + 2u - 1) = A$$

定数は任意なので, 絶対値が外れる

$$u = \frac{x}{t} \text{ に戻すと } x^2 + 2tx - t^2 = A$$

対数の和 →
真数の積

対数の○倍 →
真数の○乗

2. 1 階線形

1 階線形微分方程式

一般には $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$ の形になっているもの

$p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$ と置くと,

$$\text{一般解は } x = \frac{1}{p(t)} \left(\int p(t)Q(t)dt + C \right)$$

なぜならば

$$(p(t)x)' = (p(t))'x + p(t)x' \quad \text{積の微分}$$

$$= \left[\exp\left(\int P(t)dt\right) \right]' x + p(t)x'$$

$$= p(t)P(t)x + p(t)x' \quad \text{指数の合成関数の微分}$$

$$= p(t)\{P(t)x + x'\} = p(t)Q(t)$$

よって、両辺を積分して $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$

例題

$x' + x = t$ を解いて、一般解を求めよ。

$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると $P(t) \equiv 1, Q(t) = t$

よって $p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$ とすると $p(t) = \exp\left(\int 1dt\right) = e^t$

前ページの式から $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C = e^{t+C_1} = e^{C_1}e^t$

$$C_2 e^t x = \int C_2 e^t t dt + C_3 = C_2 e^t$$

$$\frac{C_3}{C_2} = C \rightarrow e^t x = \int e^t t dt + C$$

$$\begin{aligned} \text{部分積分} \quad &= e^t t - \int e^t dt + C \\ &= e^t t - e^t + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \\ x &= t - 1 + C e^{-t} \end{aligned}$$

2'. ベルヌーイの 微分方程式

ベルヌーイの微分方程式

一般には $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n$ の形 ($n \neq 1$)

$u = x^{1-n}$ とおくと 1階線形微分方程式に変形できる

なぜならば

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} + P(t) = Q(t)x^{n-1}$$

$$\log u = (1-n) \log x$$

両辺を微分する

$$\frac{u'}{u} = (1-n) \frac{x'}{x}$$

代入

$$\frac{1}{1-n} \frac{u'}{u} + P(t) = Q(t) \frac{1}{u}$$

$$u' + (1-n)P(t)u = (1-n)Q(t) \quad \text{1階線形}$$

例題

$x' + tx = tx^2$ が1階線形微分方程式で表せることを示せ。

$u = x^{-1}$ とおく

両辺の対数をとると $\log u = -\log x$

両辺をtで微分すると $\frac{u'}{u} = -\frac{x'}{x}$

両辺をxで割ると $\frac{x'}{x} + t = tx$

$$-\frac{u'}{u} + t = \frac{t}{u}$$

-u倍

1階線形

$$u' - tu = -t$$

今日のまとめ

- 同次形
- 1階線形
- ベルヌーイ