

1. 与式の右辺の分母分子を t で割ると $x' = \frac{\frac{x}{t} - 1}{2}$ となるので、同次形の微分方程式です。よって $\frac{x}{t} = u$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= t \frac{du}{dt} + u = \frac{u-1}{2} \\ t \frac{du}{dt} &= -\frac{u+1}{2} \\ \frac{du}{u+1} &= -\frac{dt}{2t} \\ \int \frac{du}{u+1} &= -\int \frac{dt}{2t} \\ \log |u+1| &= -\frac{1}{2} \log |t| + C \quad (C \text{ は定数}) \\ u+1 &= \pm e^C |t|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{A1}$$

よって、 $\pm e^C$ をあらためて定数 A とおくと、 $u = -1 + A \frac{1}{\sqrt{|t|}}$ が得られます。ここで $u = \frac{x}{t}$ を代入すると、一般解は $x = -t + A\sqrt{|t|}$ となります。■

2. 与式より $x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{t}$ と変形でき、これを 1 階線型微分方程式の一般形 $x' + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると $P(t) = -\frac{1}{t}, Q(t) = \frac{1}{t}$ となります。よって、 $p(t) = \exp(-\int \frac{1}{t} dt) = \frac{1}{t}$ とすると、一般解は C を定数として

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}x &= \int \frac{1}{t^2} dt \\ \frac{1}{t}x &= -\frac{1}{t} + C \\ x &= -1 + Ct \end{aligned} \tag{A2}$$

となります。■

3. 与式は Bernoulli の微分方程式で、その一般形 $x' + P(t)x = Q(t)x^n$ にあてはめると $P(t) \equiv 1, Q(t) = t, n = 2$ です。したがって、 $u = \frac{1}{x}$ とおくと、 $u' - u = -t$ と変形できます。この方程式は 1 階線型微分方程式で、 $p(t) = \exp(\int (-1) dt) = e^{-t}$ とおくと、 $(p(t)u)' = p(t)(-t)$ がなりたつことから

$$\begin{aligned} (e^{-t}u)' &= -te^{-t} \\ e^{-t}u &= -\int te^{-t} dt \\ e^{-t}u &= -\left[-te^{-t} + \int e^{-t} dt\right] \\ e^{-t}u &= te^{-t} + e^{-t} + C \quad (C \text{ は定数}) \end{aligned} \tag{A3}$$

よって $u = t + 1 + Ce^t$ で、 $u = \frac{1}{x}$ ですから一般解は $x = \frac{1}{t + 1 + Ce^t}$ となります。■