

2016年度秋学期 応用数学（解析） 第8回

第2部・基本的な微分方程式
2階線形微分方程式（2）

浅野 晃
関西大学総合情報学部



2階線形微分方程式（復習）

2階線形微分方程式

一般には $x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$

ここが恒等的に0なのが【斉次】
そうではないのが【非斉次】

一番簡単なのは $x'' + ax' + bx = 0$

定数係数の斉次方程式

とりあえず, $x \equiv 0$ は解【自明解】

それ以外には？

2階線形微分方程式の解

とりあえず

$x'' + ax' + bx = 0$ に $x(t) = e^{\lambda t}$ を代入すると

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda^2 + a\lambda + b) e^{\lambda t} = 0$$

ここが0になるような λ については

$x = e^{\lambda t}$ は解, その定数倍も解

λ の2次方程式だから, みたす λ はたいてい2つ $\lambda_1,$

λ_2

一般解は $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ $x \equiv 0$ を含む

2階線形微分方程式を解く

$x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の
斉次形2階線形微分方程式

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ をみたく λ について $x = e^{\lambda t}$ は解
特性方程式という

特性方程式の解の形によって、3パターン

異なる2つの実数解の場合
異なる2つの虚数解の場合
重解の場合

実数解が2つの場合

特性方程式の
異なる2つの実数解 λ_1, λ_2

微分方程式の
1次独立な解 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

一般解は $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

(つまり、最初のとおり)

虚数解が2つの場合

一般解は $x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$

さらに計算すると

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= e^{\alpha t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}) \quad \text{なぜ三角関数になるのかは、また先で} \\ &= e^{\alpha t} (C_1 (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + C_2 (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))) \\ &= e^{\alpha t} ((C_1 + C_2) \cos(\beta t) + i(C_1 - C_2) \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

定数を置き直して、一般解は

$$x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$$

振動を表している これも先で

重解の場合

ふつうにやると、微分方程式の解は
 $C_1 e^{\lambda_1 t}$ しか出て来ない

これと1次独立なもうひとつの解は $te^{\lambda_1 t}$

確かめるため、解を微分して、微分方程式に代入してみる

$$\begin{aligned} (te^{\lambda_1 t})' &= \lambda_1 te^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t} \\ (te^{\lambda_1 t})'' &= \lambda_1(\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

微分方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} &(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 te^{\lambda_1 t} + bte^{\lambda_1 t} \\ &= \{\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\}te^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a)e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

λ_1 は特性方程式の解
だから0

特性方程式の
解と係数の関係で0

一般解は

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 te^{\lambda_1 t}$$

見つけ方は
前回のプリントで
(定数変化法)

非斉次形 2階線形微分方程式

非斉次形2階線形微分方程式

前回のは $x'' + ax' + bx = 0$
定数係数の斉次方程式

今回は $x'' + ax' + bx = R(t)$
[非斉次] tの式

非斉次形2階線形微分方程式

前回のは $x'' + ax' + bx = 0$
定数係数の斉次方程式

今回は $x'' + ax' + bx = R(t)$
[非斉次] tの式

結論からいうと

非斉次形の一般解 =
非斉次形の特殊解なにかひとつ (何でもいい)
+ 対応する斉次形の一般解

一般的にいうと

$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$ を, $x_1 = x, x_2 = x'$ とおいて

$x'_1 = x_2$ と表す
 $x'_2 = -Q(t)x_1 - P(t)x_2 + R(t)$

行列で $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix}$

$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$

1階線形微分方程式の形になる
何階線形微分方程式でも, この形にできる

一般的にいうと

非斉次形 n 階線形微分方程式

$x' = A(t)x + b(t)$ の一般解 $x_s(t)$ は

非斉次形方程式

$x' = A(t)x + b(t)$ の任意の特殊解 $x_p(t)$ と

対応する斉次形方程式

$x' = A(t)x$ の一般解 $x_h(t)$ の 和で表される。

$$x_s(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

何階微分方程式でも
定数係数でなくても

証明は、割と簡単

まず $x_s(t) = x_h(t) + x_p(t)$ が

非斉次形方程式 $x' = A(t)x + b(t)$ の解であることを
確かめる

右辺に $x_s(t) = x_h(t) + x_p(t)$ を代入

$$\begin{aligned}
& A(t)x_s(t) + b(t) \\
&= A(t)(x_h(t) + x_p(t)) + b(t) \\
&= \underbrace{A(t)x_h(t)}_{\text{斉次形}} + \underbrace{(A(t)x_p(t) + b(t))}_{\text{非斉次形}} \\
&= \underbrace{(x_h(t))'}_{\text{斉次形}} + \underbrace{(x_p(t))'}_{\text{非斉次形}} = (x_s(t))' \quad (\text{左辺})
\end{aligned}$$

本当に一般解か？

どんな初期値に対する特殊解でも表せるか？

証明は、割と簡単

非斉次形方程式 $x' = A(t)x + b(t)$ の一般解 $x_s(t)$ について
任意の初期値 $x_s(t_0) = x_0$ を考える

このとき、

対応する斉次形方程式 $x' = A(t)x$ の一般解 $x_h(t)$ について
初期値を $x_h(t_0) = x_0 - x_p(t_0)$ にとれば

$$\begin{aligned}
x_s(t_0) &= x_h(t_0) + x_p(t_0) \\
&= (x_0 - x_p(t_0)) + x_p(t_0) \\
&= x_0
\end{aligned}$$

だから、これで
非斉次形方程式の解で
初期値を $x_s(t_0) = x_0$

この斉次形方程式は一意だから、
斉次形方程式でこの初期値の
特殊解はひとつ

非斉次形方程式の特殊解もひとつ

例題

非斉次形2階線形微分方程式

前回のは $x'' + ax' + bx = 0$
定数係数の斉次方程式

今回は $x'' + ax' + bx = R(t)$
[非斉次] t の式

結論は **これを見つけるには
右辺の形に注目**
非斉次形の一般解 =
非斉次形の特殊解 にかひとつ (何でもいい)
+ 対応する **斉次形**の一般解

例題

$x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 3t - 2$ の一般解を求めよ。

特殊解を, $x = at^2 + bt + c$ と見当をつける

これを元の方程式に代入して整理すると

$$-(3a+3)t^2 + (4a-3b-3)t + (2a+2b-3c+2) = 0$$

これが t に関係なくなつたから

$$\begin{cases} 3a+3 = 0 \\ 4a-3b-3 = 0 \\ 2a+2b-3c+2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{これを解くと} \\ a = -1, b = -\frac{7}{3}, c = -\frac{14}{9} \end{array}$$

非斉次形の方程式の特殊解 (のひとつ) は $x = -t^2 - \frac{7}{3}t - \frac{14}{9}$

例題

$x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 3t - 2$ の一般解を求めよ。

非斉次形の特殊解 (のひとつ) は $x = -t^2 - \frac{7}{3}t - \frac{14}{9}$

対応する **斉次形**の方程式は $x'' + 2x' - 3x = 0$
特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ その解は $\lambda = 1, -3$

異なる2つの実数解なので, **斉次形**方程式の一般解は
 $x = C_1e^t + C_2e^{-3t}$

以上から, 与えられた**非斉次形**方程式の一般解は

$$x = C_1e^t + C_2e^{-3t} - t^2 - \frac{7}{3}t - \frac{14}{9}$$

例題

$x'' + 2x' - 3x = e^{2t}$ の一般解を求めよ。

特殊解を, $x = ae^{2t}$ と見当をつける

これを元の方程式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} 4ae^{2t} + 2 \cdot 2ae^{2t} - 3ae^{2t} &= e^{2t} & \text{これが } t \text{ に関係なく} \\ 5ae^{2t} &= e^{2t} & \text{なりたつから } a = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

非斉次形の方程式の特殊解 (のひとつ) は $x = \frac{1}{5}e^{2t}$

対応する **斉次形**の方程式は $x'' + 2x' - 3x = 0$

一般解は $x = C_1e^t + C_2e^{-3t}$

以上から, **非斉次形**方程式の一般解は $x = C_1e^t + C_2e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$

例題

$x'' + 2x' - 3x = 2 \cos t$ の一般解を求めよ。

特殊解を, $x = A \cos t + B \sin t$ と見当をつける

これを元の方程式に代入して整理すると

$$(2A + 2B - 2) \cos t + (-2A + 2B) \sin t = 0 \quad \text{cos, sinは独立}$$

$$\begin{cases} 2A + 2B - 2 = 0 \\ -2A + 2B = 0 \end{cases} \quad A = B = \frac{1}{2}$$

非斉次形の方程式の特殊解 (のひとつ) は $x = \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$

対応する斉次形の方程式は $x'' + 2x' - 3x = 0$

一般解は $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$$

以上から, 非斉次形方程式の一般解は

関数の1次独立とWronskian

関数の1次独立とWronskian

関数 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が1次独立とは

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0 \quad \text{が}$$

どんな t についてもなりたつなら, $C_1 = C_2 = 0$

ところで $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$ を t で微分すると

$$C_1 x_1'(t) + C_2 x_2'(t) = 0$$

まとめて行列で書くと $\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

解が $C_1 = C_2 = 0$ だけになるのは, この行列に逆行列が

$$\text{存在する時 つまり } \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Wronskianという

今日のまとめ

定数係数・非斉次形の
2階線形微分方程式

$$x'' + ax' + bx = R(t)$$

非斉次形の一般解 =

これを見つけるには
右辺の形に注目

非斉次形の特殊解なにかひとつ (何でもいい)

+ 対応する斉次形の一般解

$$x'' + ax' + bx = 0$$