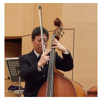
2016年度秋学期　応用数学（解析）　第１０回

第３部・微分方程式に関する話題

生存時間分布と半減期

浅野　晃

関西大学総合情報学部



今日は「寿命」を扱う微分方程式

寿命は「確率変数」

人間の寿命は，各個人によってばらばら

機械の寿命も，同じ型でも個体によってばらばら

その理由は「偶然」

寿命は［確率変数］であるという

寿命がいくらである確率がどのくらいであるかを表すのが［確率分布］

寿命の確率分布を考える

寿命を表す確率変数 T

（時刻0に誕生した人が死亡する時刻）

$$l(t) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} P(t < T < t+\Delta | T > t)$$

次の瞬間

単位時間あたり

時刻 t までは確かに生存している人が

時刻 t 以後，時間Δの間に死亡する

確率

$l(t)$ は

時刻tまで生存している人が次の瞬間に死ぬ危険の度合

［ハザード関数］

累積分布関数と「生存関数」

確率変数 T に対して $F(t) = P(T \le t)$

を［累積分布関数］

この場合

寿命が t 以下である確率

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T > t)$$ ［生存関数］

時刻 t の時点で

まだ生きている確率

ハザード関数は「瞬間瞬間の死亡の危険」

生存関数は，ある時間がたったとき，まだ生きている確率

A. Asano, Kansai Univ.

生存関数とハザード関数

寿命 T　ハザード関数 $l(t)$

累積分布関数 $F(t)$

$$
\begin{aligned}
l(t) &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} P(t < T < t + \Delta | T > t) \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P\{(t < T < t + \Delta) \text{ and } (T > t)\}}{P(T > t)} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P(t < T < t + \Delta)}{P(T > t)} \\
&= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta \to 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta}
\end{aligned}
$$

含まれる

（条件付確率の定義）

（累積分布関数の定義）

$F(t) = P(T \le t)$

A. Asano, Kansai Univ.

生存関数とハザード関数

$$
\begin{aligned}
l(t) &= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta \to 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta} \\
&= \frac{1}{P(T > t)} F'(t)
\end{aligned}
$$

（微分の定義）

$f(t) = F'(t)$ とする［確率密度関数］

$$l(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

（生存関数の定義）

$S(t) = P(T > t)$

$S'(t) = (1 - F(t))' = -F'(t) = -f(t)$

以上から $l(t) = -\dfrac{S'(t)}{S(t)}$ という微分方程式が得られる

A. Asano, Kansai Univ.

微分方程式を解く

$$
\begin{aligned}
l(t) &= -\frac{S'(t)}{S(t)} \\
&= -\frac{d}{dt}(\log S(t))
\end{aligned}
$$

（両辺を積分）

$$-\int_0^t l(u)du = \log S(t) + C$$

時刻0，つまり誕生の瞬間に生存している確率は 1

つまり $S(0) = 1$

$t = 0$ のとき $S(0) = 1$ だから

$C = 0$

よって $S(t) = \exp\left(-\int_0^t l(u)du\right)$

という解が得られる　ハザード関数と生存関数の関係

A. Asano, Kansai Univ.

ワイブル分布と指数分布

A. Asano, Kansai Univ.

ワイブル分布

ハザード関数を $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ と仮定する

$S(t) = \exp\left(-\int_0^t l(u)du\right)$ に代入

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda p(\lambda u)^{p-1} du\right)$$

微積分の関係

$$= \exp\left(-\left[(\lambda u)^p\right]_{u=0}^{u=t}\right) = \exp\left(-(\lambda t)^p\right)$$

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - \exp\left(-(\lambda t)^p\right)$$

この形の累積分布関数をもつ確率分布を

［ワイブル分布］とよぶ

A. Asano, Kansai Univ.

ワイブル分布のパラメータ

$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$　パラメータは λ と p

λ が大きいと，ハザード関数が全体に大きくなる

死亡・故障する危険がどの時刻でも大きくなる

$p > 1$ のときは，$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ の指数が正

時間が経つにつれて死亡・故障する危険が大きくなる

［摩耗故障］

$0 < p < 1$ のときは，$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ の指数が負

時間が経つにつれて死亡・故障する危険が小さくなる

［初期故障］

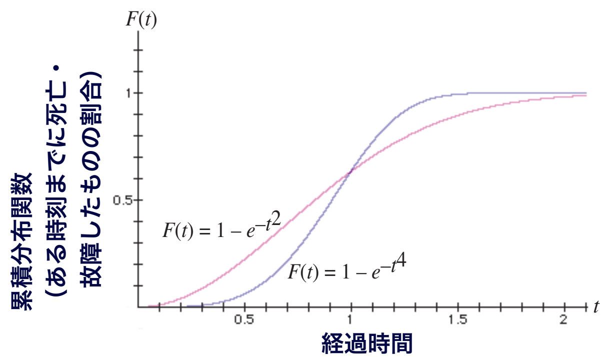
A. Asano, Kansai Univ.

ワイブル分布のパラメータ

$p = 2$ の場合と $p = 4$ の場合

どちらも摩耗故障（時間につれて故障しやすくなる）

$p = 4$ のほうが，急激に故障が増える



A. Asano, Kansai Univ.

ワイブルプロット

実務では，たくさんの個体で耐久試験を行い，
ワイブル分布を仮定して，パラメータを推測する

$S(t) = \exp(-(\lambda t)^p)$ より $\dfrac{1}{S(t)} = \exp((\lambda t)^p)$

両辺の対数を２回とる

$$\underbrace{\log\left\{\log\left(\frac{1}{S(t)}\right)\right\}}_{Y} = \log\{\log(\exp((\lambda t)^p))\}$$
$$= \log\{(\lambda t)^p\}$$
$$= p(\underbrace{\log t}_{X} + \log\lambda)$$

$$Y = p(X + \log\lambda)$$

時刻を上の X，その時刻での生存割合を上の Y に変換
してプロット→並びを近似する直線の傾きが p

A. Asano, Kansai Univ.

指数分布

$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ で $p = 1$ の場合

ハザード関数は $l(t) = \lambda$　死亡・故障する危険が時刻によらず一定［偶発故障］

累積分布関数は $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ［指数分布］

生存関数は $S(t) = e^{-\lambda t}$

放射性原子核は，どの時刻においても，その時点で
存在する核のうち一定の割合が崩壊する
ハザード関数が一定で，指数分布にしたがう

A. Asano, Kansai Univ.

半減期

ある時刻に存在する原子核の数が，その半分になるまでの
時間は，どの時刻でも一定

時刻 t に存在する原子核の数が半分になる時刻を t' とする

$$S(t') = \frac{1}{2}S(t)$$

指数分布の生存関数 $S(t) = e^{-\lambda t}$

$$e^{-\lambda t'} = \frac{1}{2}e^{-\lambda t}$$

対数をとる

$$-\lambda t' = -\log 2 - \lambda t$$

$$\underbrace{t' - t}_{\text{原子核の数が半分になるまでの時間}} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

t によらず一定
［半減期］

A. Asano, Kansai Univ.

今日のまとめ

集団中の個体の数が
死亡・故障によって
減少して行く

この現象を
表す微分方程式

解に仮定を持ち込むことで，
ワイブル分布，指数分布といった
「死亡・故障による現象のモデル」
が導かれる

A. Asano, Kansai Univ.