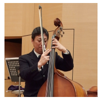
2016年度秋学期　応用数学（解析）　第１１回

第３部・微分方程式に関する話題

振動と微分方程式

浅野　晃
関西大学総合情報学部



今日は
「振動」を扱う微分方程式

振動とは

ある方向に進めば進むほど，
逆向きに進もうとする力が働く
ときにおきる運動

釣り合い位置から両方に往復を繰り返す

質点の運動方程式

質点＝質量はあるが大きさはない点

大きさがないので，物体自身の回転などは
考えなくてよい

ニュートンの運動方程式

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

質点に働く力（F）

質点の質量（m）

質点の位置（x）

質点の加速度（$\frac{d^2x}{dt^2}$）

時刻（t）

さまざまな振動について
力がどう表されるかを
考える

単振動

A. Asano, Kansai Univ.

単振動

もっとも単純な振動，復元力（下記）のみが働く

釣り合い位置にもどろうとする力［復元力］

原点を釣り合い位置とし，そこからの距離に
比例する復元力が働くとすると

$$F = -kx$$

正の定数

位置

釣り合い位置からの方向の
逆向きの力なのでマイナス

A. Asano, Kansai Univ.

単振動の運動方程式

$F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$F = -kx$

より $\boxed{m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx}$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくと

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

斉次形の２階線形微分方程式

特性方程式は $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$　虚数解 $\lambda = \pm i\omega_0$

一般解は $x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$

A. Asano, Kansai Univ.

単振動の運動方程式

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$　より　$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$

位置 x は実数だから，

C_1, C_2 とも実数でなければならない

三角関数を合成すると

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

単振動の式

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$,　$\phi = -\tan^{-1}(C_2/C_1)$

x 軸上で $[-A, A]$ の範囲を往復する振動

A. Asano, Kansai Univ.

単振動の式

x 軸上で $[-A, A]$ の範囲を往復する振動

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

[振幅]

[角振動数（角周波数）]
時間が1秒進むと，
$(\omega_0 t + \phi)$が何ラジアン進むか

1往復 = 2π ラジアン進むこと

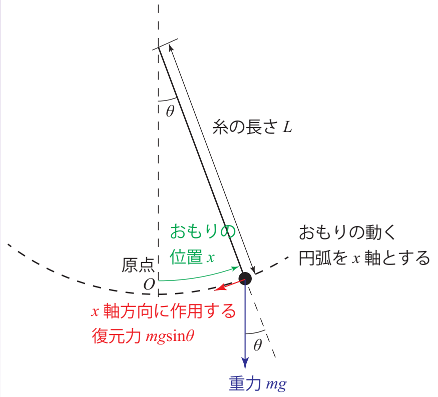
それに必要な時間は $2\pi/\omega_0$ [周期]

1秒間に何往復するか？

その回数は，周期の逆数 $\omega_0/2\pi$ [振動数（周波数）]

A. Asano, Kansai Univ.

単振り子は単振動か？



復元力は −mgsin θ

θ が小さいとき
sin θ は θ で近似できる

θ = x/Lなので，
復元力は−(mg/L)x
これをkとみれば
単振動

周期 $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{m\dfrac{L}{mg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ Lとgだけで決まる（振り子の等時性）

θ が小さい，つまり振れ幅が小さいときのみ成り立つ

A. Asano, Kansai Univ.

減衰振動

A. Asano, Kansai Univ.

減衰振動

復元力以外に，[抵抗力] がはたらく場合

運動が速いほど，それを妨げる力が働く

空気抵抗など

質点の速度は $\dfrac{dx}{dt}$ ⟶ 抵抗力は $-a\dfrac{dx}{dt}$

逆向きで マイナス　正の定数

運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt}$$

$\mu = \dfrac{a}{2m}$ とおく [抵抗係数]　$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

A. Asano, Kansai Univ.

減衰振動の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

これも
斉次形の２階線形微分方程式

特性方程式は $\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$　解 $\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$

$\mu^2 < \omega_0^2$ の場合を考える　抵抗力が比較的小さい場合

$\lambda = -\mu \pm \underbrace{\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}}_{<0}$ は虚数解

微分方程式の解 $x = e^{-\mu t}(C_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\ t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\ t))$

三角関数を合成 $x = Ae^{-\mu t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\ t + \phi)$

振幅が時間とともに小さくなる
［減衰振動］

A. Asano, Kansai Univ.

強制振動と共鳴

A. Asano, Kansai Univ.

強制振動

復元力に加えて，外部から［強制力］が
はたらく場合

質点を，角振動数 ω で強制的に振動させる

復元力は $-kx$
強制力は $F\cos\omega t$

運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F\cos\omega t$$

$f = \frac{F}{m}$　$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$$

これは
非斉次形の２階線形微分方程式

A. Asano, Kansai Univ.

強制振動の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$$

対応する斉次形の
微分方程式は $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$　単振動の式と同じ

一般解は $x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

特殊解をひとつ見つける

$x = C\cos\omega t$ を入れてみると $C(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t = f\cos\omega t$

よって，$\omega \neq \omega_0$ のとき $C = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$

非斉次形の一般解は $x = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$

A. Asano, Kansai Univ.

強制振動

［強制振動］の式　$x = \underbrace{A\cos(\omega_0 t + \phi)}_{\text{強制力のないときの振動}} + \underbrace{\frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t}_{\text{強制振動}}$

強制力のないときの振動

［固有振動］

ω_0　［固有角振動数］

$\omega_0/2\pi$ ［固有振動数］

強制振動

強制振動の角振動数 ω が固有角振動数 ω_0 に近づくと強制振動の項が大きくなる

$\omega = \omega_0$ のときは発散する

A. Asano, Kansai Univ.

共鳴

$\omega = \omega_0$ のときは強制振動の項が発散する

もう一度もとの方程式に戻る $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$

$x = t(C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t)$ と見当をつけて，

また右辺も $\omega = \omega_0$ としてそれぞれ代入すると

$$-2C_1\omega_0\sin\omega_0 t + 2C_2\omega_0\cos\omega_0 t = f\cos\omega_0 t$$

よって　$C_1 = 0, C_2 = \dfrac{f}{2\omega_0}$

解は　$x = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \dfrac{ft}{2\omega_0}\sin\omega_0 t$

時間がたつと振動しながら発散する

［共鳴］

A. Asano, Kansai Univ.

今日のまとめ

振動を表す微分方程式

単振動

減衰振動

強制振動

２階線形微分方程式で表され，

それを解くと振動を表す式が得られる

A. Asano, Kansai Univ.