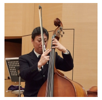
2016年度秋学期　応用数学（解析）　第１２回

第４部・複素関数論ダイジェスト
複素関数・正則関数

浅野　晃
関西大学総合情報学部

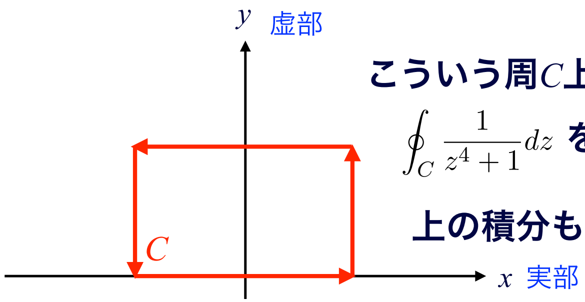


いったい
何をやろうというのか

こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$$ まっとうには計算できません。

そこで　数直線を　複素平面に拡張 $z = x + yi$



こういう周C上で

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz$$ を計算すると

上の積分も求まる

複素数と複素関数

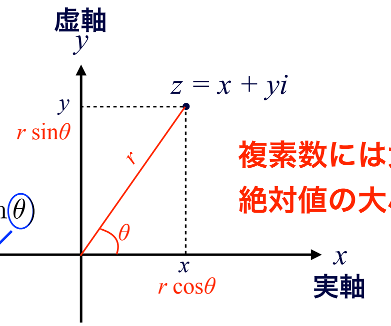
複素数と複素関数

複素数 $z = x + yi$ （x, y は実数, $i = \sqrt{-1}$）

x：実部　y：虚部

複素数で定義された関数が［複素関数］

複素平面



$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

r：［絶対値］　θ：［偏角］

複素数には大小はない
絶対値の大小がある

複素数の指数関数

実数の指数関数のテイラー展開

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

複素数の指数関数は，テイラー展開で定義する

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

すると

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots$$

$$= \underbrace{(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots)}_{\cos\theta\text{ のテイラー展開}} + i\underbrace{(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots)}_{\sin\theta\text{ のテイラー展開}}$$

よって

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$\theta = \pi$ のとき

$e^{i\pi} + 1 = 0$ ［オイラーの等式］

複素関数と微分

正則関数

複素関数の微分

複素関数の微分の定義は，実関数と同様

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ただし，変数は複素平面上にあるのが，大きな違い

複素関数 $f(z)$ が，複素平面の領域 D で［正則］

→ $f(z)$ が D 内のどこでも微分可能

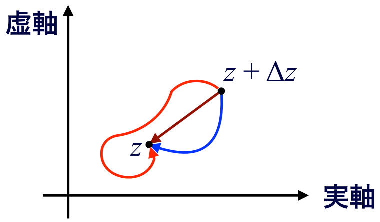
複素平面上で微分可能とは？

複素平面上での「微分可能」

複素関数 $f(z)$ が，複素平面上のある点 z で微分可能とは

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

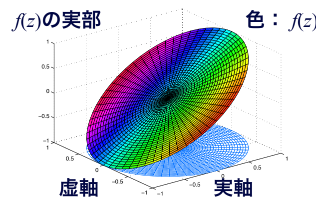
複素平面上で
$z + \Delta z$ が z にどのように近づいても，
極限値はひとつに定まる



どのように近づいても，
極限値は同じ

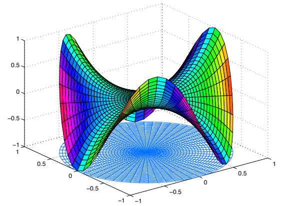
正則関数は，
「折り目のないぐにゃぐにゃの板」

正則関数を図示すると

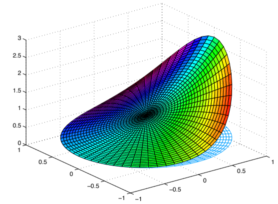


$f(z) = z$

色： $f(z)$の虚部



$f(z) = z^3$

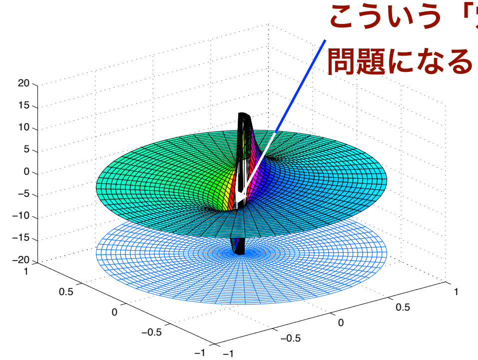


$f(z) = e^z$

MATLABで描画
参考：http://jp.mathworks.com/help/matlab/examples/functions-of-complex-variables.html

正則でない例

こういう「穴」が
問題になる



$f(z) = 1 / z$

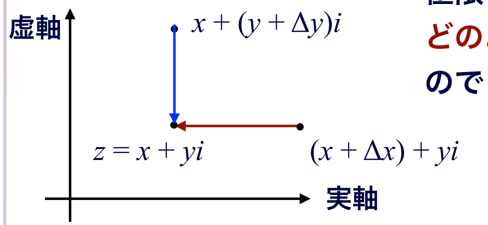
MATLABで描画
参考：http://jp.mathworks.com/help/matlab/examples/functions-of-complex-variables.html

コーシー・リーマンの関係式

複素関数 $f(z)$ が正則である必要十分条件は

$z = x + yi$ とするとき $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表せるなら

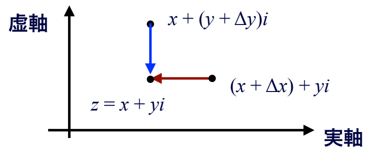
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad \text{かつ} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$



極限をとるときに
どのように近づいてもよい
ので

この２通りを
考える

コーシー・リーマンの関係式



この２通りの近づき方で
極限値は等しい

$$
\begin{aligned}
\leftarrow \quad f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y)\} - \{u(x,y) + iv(x,y)\}}{((x+\Delta x) + yi) - (x + yi)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
$$

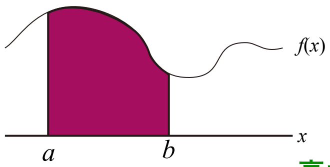
$$
\begin{aligned}
\downarrow \quad f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y)\} - \{u(x,y) + iv(x,y)\}}{(x + (y+\Delta y)i) - (x + yi)} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \\
&= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}
$$

これらが実部・虚部とも等しい

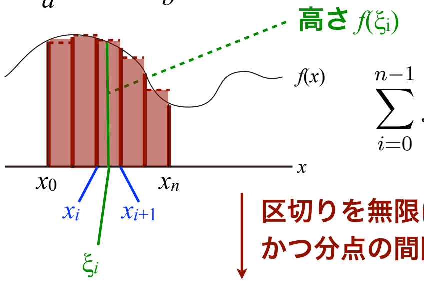
複素関数の積分

実関数の積分

この面積を
求めたい



長方形で近似



$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

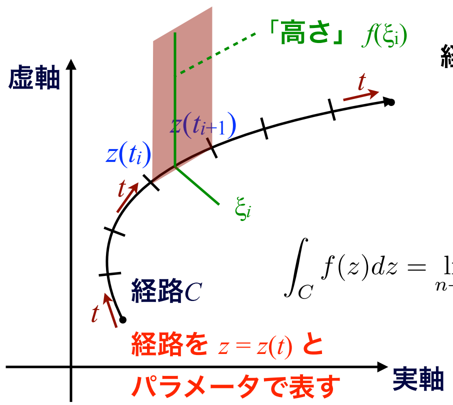
区切りを無限に細かく
かつ分点の間隔の最大値→0

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

実関数の
積分

複素関数の積分

積分区間だけでなく
複素平面のどこを通って積分するか（経路）が重要



経路の上に
「板」が載っているイメージ
（ただし「高さ」は複素数）

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(z(t_{i+1}) - z(t_i))$$

$f(z)$ の経路 C に沿った積分

正則関数と積分

複素関数 $f(z)$ が，領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分なら

$$F'(z) = f(z)$$

経路 C が両端 a, b を含めてすべて D 内にあれば

$$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a)$$

積分は経路に依存しない

正則関数と積分

複素関数 $f(z)$ が，領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分なら $F'(z) = f(z)$

経路 C が両端 a, b を含めてすべて D 内にあれば

$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a)$　**積分は経路に依存しない**

経路C を $z = z(t)$ で表す　両端は $z(0) = a, \ z(1) = b$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt \quad \text{（置換積分）}$$

$$= \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dz}\frac{dz(t)}{dt}dt$$

（合成関数の微分）

$$\frac{dF(z(t))}{dt} = \frac{dF(z(t))}{dz}\frac{dz(t)}{dt}$$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dt}dt$$

$$= F(z(1)) - F(z(0)) = F(b) - F(a)$$

閉曲線に沿った積分

さっきの定理

複素関数 $f(z)$ が，領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分なら $F'(z) = f(z)$

経路 C が両端 a, b を含めてすべて D 内にあれば

$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a)$　**積分は経路に依存しない**

ということは，

経路 C が単純閉曲線なら，始点も終点も同じだから

$$\int_C f(z)dz = 0$$

コーシーの積分定理

閉曲線に沿った積分

複素関数 $f(z)$ が，領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分で $F'(z) = f(z)$

経路 C が，D 内にある単純閉曲線ならば $\int_C f(z)dz = 0$

注：「領域内で正則」であって，「経路上で正則」ではない

実は

複素関数 $f(z)$ が，領域 D での正則関数で
経路 C が，D 内にある単純閉曲線ならば

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad \text{［コーシーの積分定理］}$$

$\oint_C f(z)dz$　**閉曲線上の積分を表す**

示唆しているのは　**正則関数の微分は正則関数。**
正則関数は何度でも微分できる。

コーシーの積分定理

コーシーの積分定理

複素関数 $f(z)$ が，領域 D での正則関数で
経路 C が， D 内にある閉曲線ならば $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$

証明は，グリーンの定理で

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

線積分と面積分を交換

２次元関数

閉曲線 C 上での（線）積分

閉曲線 C に囲まれた領域 D' 内での（面）積分

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ として

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C \{u(x,y) + iv(x,y)\}(dx + idy) \\ &= \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) \\ &= \iint_{D'} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_{D'} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy\end{aligned}$$

正則関数なので，
コーシー・リーマンの
関係式よりどちらもゼロ

今日のまとめ

複素関数

複素数の指数関数
複素関数の微分→「正則関数」
複素関数の積分（経路に沿った積分）

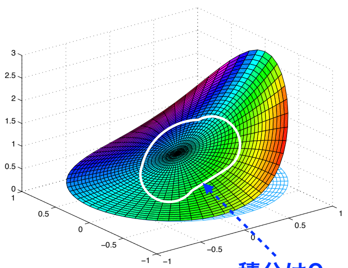
コーシーの積分定理

正則関数を閉曲線に沿って積分すると０

正則でない点を囲んで積分したら？

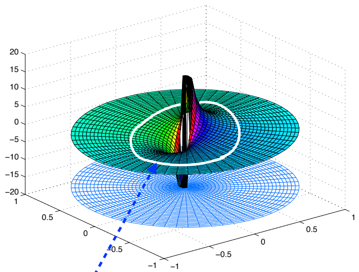
次回に向けて

正則でない点を囲んで積分したら？



積分は0

$f(z) = e^z$



$f(z) = 1 / z$

積分は？

正則でない「穴」によって決まる