

2016年度秋学期 応用数学（解析） 第13回

第4部・複素関数論ダイジェスト
孤立特異点と留数

浅野 晃
関西大学総合情報学部

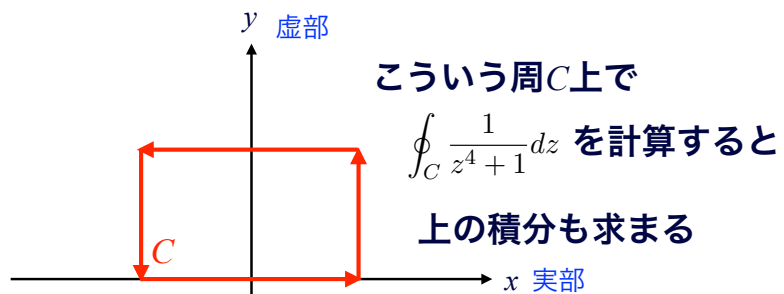


なにをするんでしたっけ？

こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \text{ まっとうには計算できません。}$$

そこで 数直線を 複素平面に拡張 $z = x + yi$

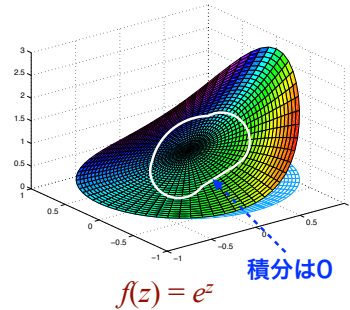


前回の復習
コーシーの積分定理

コーシーの積分定理

複素関数 $f(z)$ が、領域 D での正則関数で
経路 C が、 D 内にある単純閉曲線ならば

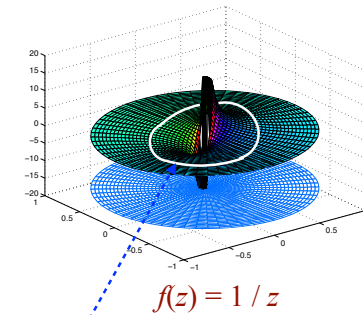
$$\int_C f(z) dz = 0$$



2016年度秋学期 応用数学 (解析)

ここからの話は

正則でない点を囲んで積分したら？



正則でない「穴」によって決まる

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

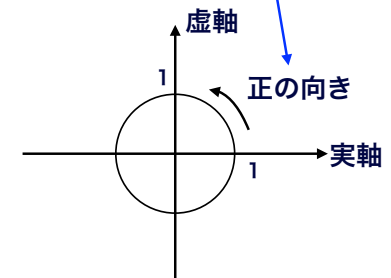
$f(z) = z^n$ の積分

z^n の積分を考える

関数をべき級数で表して
各項の積分を考えるため

$f(z) = z^n$ を、単位円周 C に沿って正の向きに
回って積分する

複素平面において
原点を中心とする
半径1の円周



2016年度秋学期 応用数学 (解析)

z^n の積分を考える

$n = 0, 1, 2, \dots$ のとき

$f(z) = z^0, z^1, z^2, \dots$ は単位円周 C の内部で正則

コーシーの積分定理により $\oint_C f(z) dz = 0$

z^n の積分を考える

$n = -1, -2, -3, \dots$ のとき

ややこしいので、あらためて

$f(z) = \frac{1}{z^n}$ とおいて $n = 1, 2, 3, \dots$ とする

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} i e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta \end{aligned}$$

置換積分

経路 C 上で $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)

z^n の積分を考える

$f(z) = \frac{1}{z^n}$ について $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z} dz &= i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta \quad n=1 \\ &= i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \end{aligned}$$

$n = 2, 3, \dots$ のとき

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z^n} dz &= \frac{i}{i(1-n)} \left[e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{1-n} \left[e^{2(1-n)\pi i} - 1 \right] \end{aligned}$$

$e^{2(1-n)\pi i} = \cos(2(1-n)\pi) + i \sin(2(1-n)\pi) = 1$ より $\oint_C \frac{1}{z^n} dz = 0$

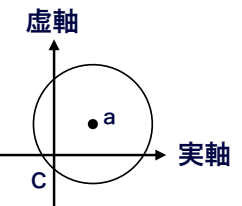
z^n の積分を考える

つまり

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad \oint_C \frac{1}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

また、 a を中心とする半径1の円周を C とすると

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$



コーシーの積分公式

コーシーの積分公式

正則関数の任意の点での値は,
その点を囲む閉曲線上の値だけできまる

領域 D で正則な関数 f の点 z における値 $f(z)$ は,
 D 内で点 z を囲み, 正の方向に1周する閉曲線 C 上の積分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{で表される}$$

$z=0$ のときは

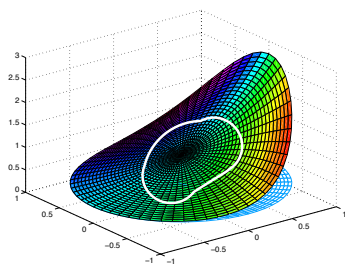
原点を囲み, 正の方向に1周する閉曲線 C 上の積分

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad \text{で表される}$$

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

コーシーの積分公式

正則関数の任意の点での値は,
その点を囲む閉曲線上の値だけできまる



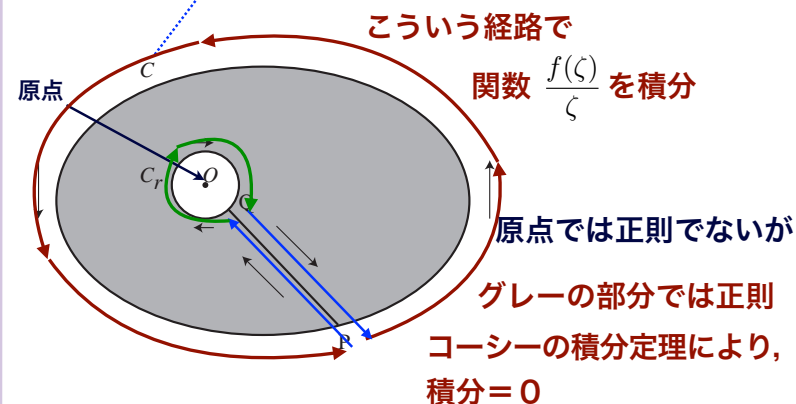
$$f(z) = e^z$$

正則関数は
「折り目なく」
曲がっているから,
周囲 (囲む閉曲線上) の
値によって
その中心の値が決まって
しまっても不思議ではない

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

コーシーの積分公式

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad \text{を考える}$$



2016年度秋学期 応用数学 (解析)

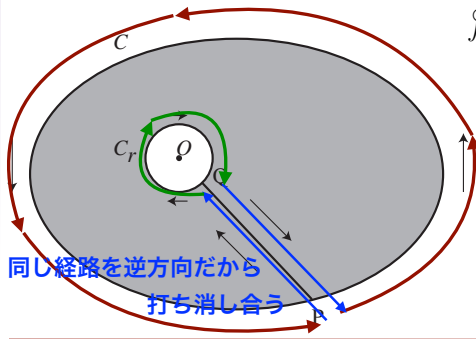
コーシーの積分公式

グレーの部分では正則 コーシーの積分定理により,

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_P^Q \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_Q^P \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0$$

Cとは逆回りだからマイナス

$$\oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = - \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$



つまり

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

同じ経路を逆方向だから
打ち消し合う

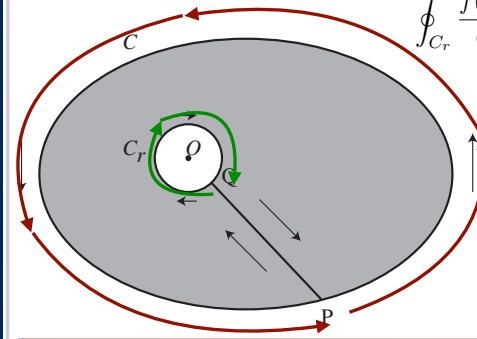
2016年度秋学期 応用数学 (解析)

コーシーの積分公式

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad \text{内側の円の半径} \rightarrow 0 \text{ とすると}$$

に収束する
(詳細略)

$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta = f(0) \oint_{C_r} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i f(0)$$



よって

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

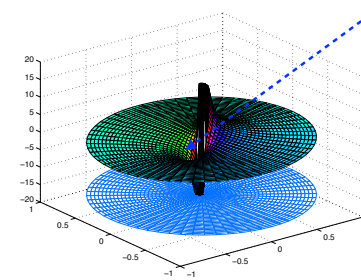
2016年度秋学期 応用数学 (解析)

孤立特異点と ローラン級数展開

ここからの見通し

孤立特異点とは

こういう、正則関数にあいた「穴」
(1点を除いて正則)

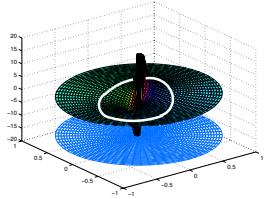


$$f(z) = 1/z$$

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

ここからの見通し

孤立特異点をもつ関数について
孤立特異点の周りの積分を使って
関数が級数に展開できる (ローラン級数展開)



ローラン級数を
積分することで
孤立特異点の周りの
積分は「留数」だけで
表されることがわかる

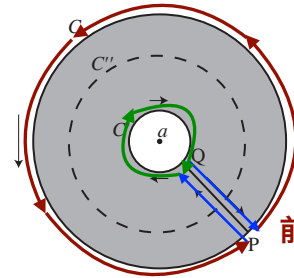
留数を別途求められれば、積分が簡単に求まる

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

ローラン級数展開

孤立特異点の周りの経路で積分
前と同じ考えで、コーシーの積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



前と同じ経路で

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

ローラン級数展開

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

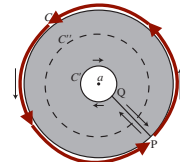
等比級数の形

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}}$$

絶対値が1より小さく、収束する

ζは外側の経路上だから

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^2 + \dots \right\}$$



2016年度秋学期 応用数学 (解析)

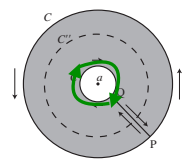
ローラン級数展開

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^2 + \dots \right\}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^2 + \dots \right\}$$

こちらのζは内側の経路上



2016年度秋学期 応用数学 (解析)

ローラン級数展開

以上から

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

孤立特異点 a のまわりのローラン級数

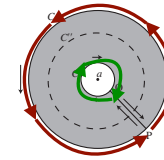
ローラン級数展開

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ところで



グレイの部分で $f(z)$ は正則なので,
コーシーの積分定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta = 0$$

よって

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{-n-1} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

留数と「n位の極」

留数

関数 $f(z)$ を展開して,

C'' に沿って積分

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \dots$$

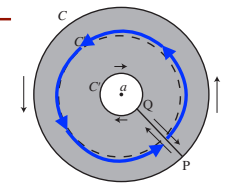
つまり

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} f(z) dz$$

$f(z)$ の孤立特異点 a における
【留数 (residue)】 という $\text{Res}(a; f)$

ここしか残らない
積分すると $2\pi i$

留数を別の方法で求められれば, 積分は簡単に計算できる



「n位の極」と留数

ローラン級数が a_{-n} から始まるような
孤立特異点を, [n位の極] という

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots$$

両辺を $(n-1)$ 回微分すると

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) = (n-1)!a_{-1} + \frac{n!}{1!}a_0(z-a) + \frac{(n+1)!}{2!}a_1(z-a)^2 + \cdots$$

微分によって, a_{-1} の手前の項まで消える

「n位の極」と留数

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) = (n-1)!a_{-1} + \frac{n!}{1!}a_0(z-a) + \frac{(n+1)!}{2!}a_1(z-a)^2 + \cdots$$

$z \rightarrow a$ のとき, これらの項は0

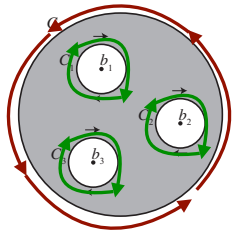
よって

$$\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z)$$

孤立特異点を囲んだ閉曲線上の積分は
留数で表される $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} f(z) dz$

n位の極については, 留数は別途求まる

孤立特異点がいくつあっても



$$\oint_C f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \oint_{C_2} f(z) dz - \cdots = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \text{Res}(b_1; f) + \text{Res}(b_2; f) + \cdots$$

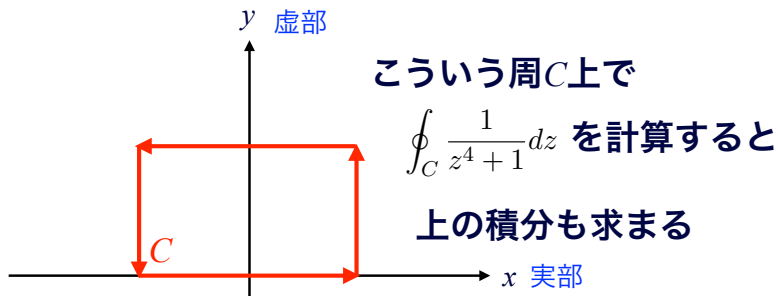
いくつかの孤立特異点を囲んだ
閉曲線上の積分は
それぞれの孤立特異点での
留数がわかれば求められる

ようやく, 最初の問題へ

こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad \text{まっとうには計算できません。}$$

そこで 数直線を 複素平面に拡張 $z = x + yi$

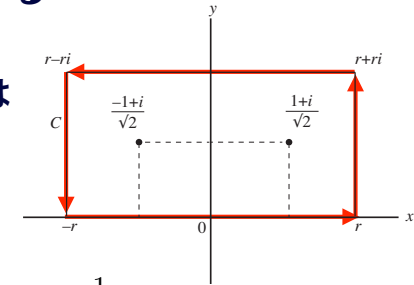


2016年度秋学期 応用数学 (解析)

複素関数にして積分する

$$\oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz \quad \text{を計算する}$$

経路は



$$\frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})}$$

孤立特異点 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ は, **すべて1位の極**
展開するまでもなく

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

複素関数にして積分する

経路の内部にある孤立特異点は2つ

それぞれ留数を求める

$$\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \right) (z-a)^n f(z)$$

$n=1$ だから微分しなくてよい

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{z^4 + 1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)} \\ &= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{同様に } \text{Res}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f\right) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

複素関数にして積分する

$$\text{よって } \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \text{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) + \text{Res}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f\right) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

$$\oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

では $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$ は?

$r \rightarrow \infty$ のとき,

実軸上以外は0

(略, プリントで) $\text{よって } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

2016年度秋学期 応用数学 (解析)

今日のまとめ

孤立特異点とローラン級数展開

孤立特異点の周りの積分を使って
関数を級数に展開することができる

留数

ローラン級数の形で積分すると
孤立特異点の周りの積分は留数で表せる

留数を使って積分を求める

n 位の極については、留数を別の方法で
求めることで、積分が簡単に求められる