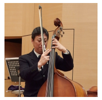
2016年度秋学期　応用数学（解析）　第１４回

第５部・測度論ダイジェスト

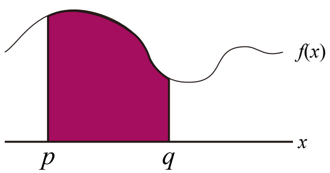
ルベーグ測度と完全加法性

浅野　晃
関西大学総合情報学部

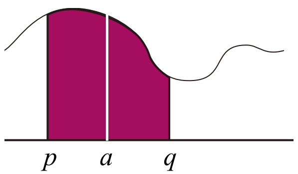


積分に対する疑問

積分に対する疑問



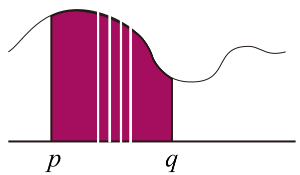
積分 $\displaystyle\int_p^q f(x)dx$



$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ だから，

aのところで幅0の
直線を抜いても
積分の値は変わらない

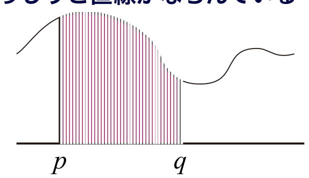
積分に対する疑問



$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

幅0の直線を何本抜いても
積分の値は変わらない

どれだけ拡大してみても，
びっしりと直線がならんでいる



可算無限個の直線を
抜いても
積分の値は変わらない
のか？

「数えられる」無限

1, 2, 3, … ← そして，「無限」

自然数とは，数えるための数字

自然数の集合と同じ無限を
「数えられる無限」すなわち
［可算無限］という

その「個数」は［可算基数］$\aleph_0$（アレフゼロ）
（よく「可算無限個」という）

どうやって数えるのか

自然数と対応がつく集合は数えられる

自然数　1, 2, 3, …
集合A = {a, b, c, …}

1対1対応がつく
（［全単射］が
存在する）なら

この集合の［基数］（［濃度］）は $\aleph_0$
［可算無限集合］という

偶数の集合の濃度は

偶数と自然数とは対応がつくか

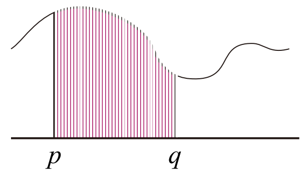
自然数　1, 2, 3, …, n, …
偶数　2, 4, 6, …, 2n, …

1対1対応がつく
（全単射が存在する）

偶数の基数も $\aleph_0$
自然数と「個数」は同じ

積分に対する疑問

どれだけ拡大してみても，
びっしりと直線がならんでいる



幅0の直線を可算無限個
抜いても
積分の値は変わらない
のか？

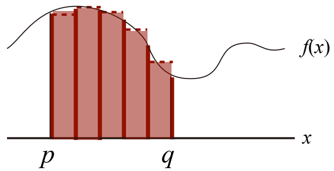
この疑問に答えるには，
「幅」「面積」というものをもっと精密に
考える必要がある

「測度論」

ジョルダン測度

A. Asano, Kansai Univ.

区分求積法で積分を求める



長方形で近似

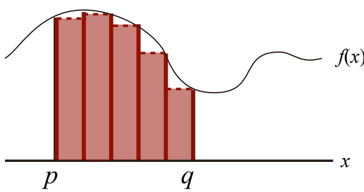
積分 $\int_p^q f(x)dx$ は,

積分区間を 重なりのない, 有限個の
区間に分けて,
その上の長方形の面積の極限

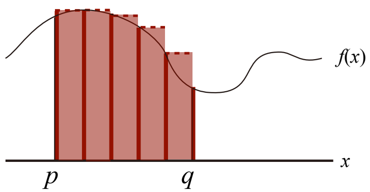
「極限」とは, 無限ではなく有限

A. Asano, Kansai Univ.

ジョルダン内測度と外測度



グラフの下側の部分の
内部におさまる長方形



グラフの下側の部分を
内部に含む長方形

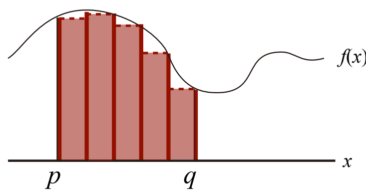
区間の分け方をいろいろ変えた時

こちらの上限
ジョルダン内測度

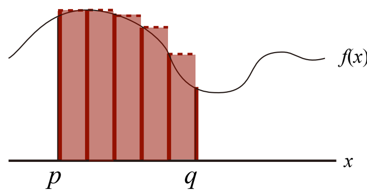
こちらの下限
ジョルダン外測度

A. Asano, Kansai Univ.

ジョルダン測度



こちらの上限
ジョルダン内測度



こちらの下限
ジョルダン外測度

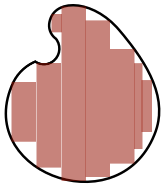
両者が一致するときジョルダン測度という
２次元の場合これを面積という

ジョルダン測度が定まる図形（集合）を
ジョルダン可測という

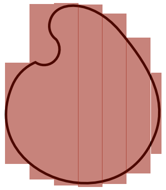
A. Asano, Kansai Univ.

ジョルダン測度

積分の例（区分求積法）に限らず



これの上限が
ジョルダン内測度



これの下限が
ジョルダン外測度

両者が一致するときジョルダン測度
２次元の場合これを面積という

ジョルダン測度が定まる図形（集合）を
ジョルダン可測という

A. Asano, Kansai Univ.

ジョルダン測度の性質

ジョルダン可測な集合Aの
ジョルダン測度をJ(A)とする

$J(\emptyset) = 0$　　空集合の測度は0

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$

重なりのない２つの集合については
和集合の測度は測度の和

有限加法性という

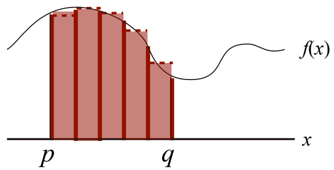
A. Asano, Kansai Univ.

ルベーグ測度

A. Asano, Kansai Univ.

「有限個の長方形」

長方形で近似



積分 $\int_p^q f(x)dx$ は，

積分区間を 重なりのない，有限個の 区間に分けて，
その上の長方形の面積の極限　ジョルダン測度

極限は，「無限」とは違う
有限だが，好きなだけ大きくできる

A. Asano, Kansai Univ.

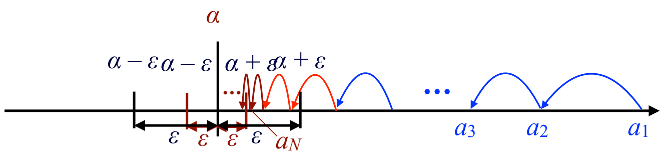
数列の収束の定義

数列$\{a_n\}$が α に収束するとは

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については，

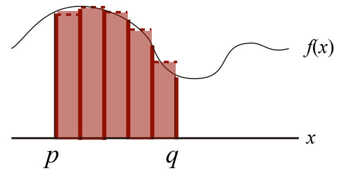
a_nはみなその狭い区間$[\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon]$に入る



εをどんなに小さくしても　そういうNがある

「有限個の長方形」

長方形で近似



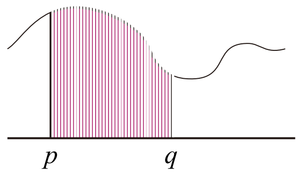
積分 $\displaystyle\int_p^q f(x)dx$ は，

積分区間を 重なりのない， 有限個の 区間に分けて，
その上の長方形の面積の極限　　ジョルダン測度

極限は，「無限」とは違う
有限だが，好きなだけ大きくできる

有限個の長方形では，困る

どれだけ拡大してみても，
びっしりと直線がならんでいる



幅0の直線を可算無限個抜いても

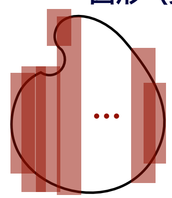
積分の値は変わらないのか？

こういう場合でも
積分や面積を考えられるようにするには

可算無限個の長方形にもとづく測度が必要

ルベーグ外測度

図形（集合）S



Sを
重なりを許した
可算無限個の長方形で覆う

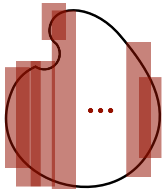
それらの長方形の面積の和の下限を
ルベーグ外測度という　$m^*(S)$

$m^*(\emptyset)=0$　　空集合の外測度は0

$S \subset T = m^*(S) \leqq m^*(T)$

包含関係と外測度の大小関係は一致

完全劣加法性



ジョルダン測度の「有限加法性」

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$

可算無限個の長方形を使う場合も
同じような性質がなりたたないか？

ルベーグ外測度については

完全劣加法性

有界な集合の列$S_1, S_2, \cdots$について

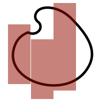
$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ が有界ならば $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$

可算無限個の和集合　　外測度の可算無限個の和

完全劣加法性の証明

有界な集合の列

$S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots$



S_iを長方形で覆う　$I_{1(i)}$ $I_{2(i)}$ $I_{3(i)}$ …

この覆い方は

$S_i \subset I_{1(i)} \cup I_{2(i)} \cup \cdots \cup I_{n(i)} \cup \ldots$

$\sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| < m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$

面積の和が　その下限　よりも少し大きい

こういう覆い方$I_{1(i)}, I_{2(i)}, I_{3(i)}, \cdots$が存在する

他のS_iについても同様だから $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)}$

各S_iについて　$I_{1(i)}, I_{2(i)}, I_{3(i)}, \cdots$で覆う

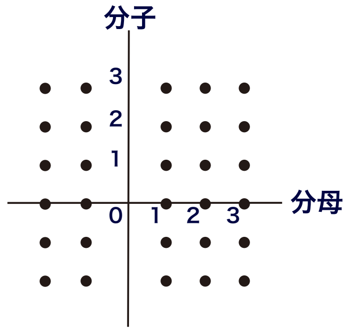
完全劣加法性の証明

$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)}$　可算無限個の長方形の，可算無限個の和集合

可算無限個の長方形の和集合　と同じ

問題1

有理数は，可算基数をもつか



分母を横軸，
分子を縦軸とすると，
有理数は図の黒点
（格子点）

※分母0の点は除く

すべての格子点を一筆でたどれれば
自然数と一対一対応がつく

完全劣加法性の証明

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)}$$

可算無限個の長方形の，
可算無限個の和集合

可算無限個の長方形の和集合　と同じ

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| < m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$< \sum_{i=1}^{\infty}\left(m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right)$$

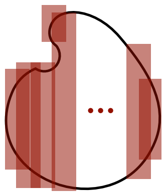
$$= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i) + \varepsilon$$

ε は正の数であればいくらでも
小さくできる

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$$

ルベーグ測度と完全加法性

ルベーグ内測度，ルベーグ測度



ルベーグ外測度　$m^*(S)$

ルベーグ内測度　補集合の外測度で　$m_*(S)$

ルベーグ外測度とルベーグ内測度が一致するとき

ルベーグ可測　$m(S) \equiv m^*(S) = m_*(S)$

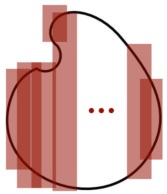
ルベーグ測度

任意のEについて

ルベーグ可測な集合Sは　$m^*(E) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c)$

Sは［可測集合］である

完全加法性



ジョルダン測度の「有限加法性」

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$$

可算無限個の長方形を使う場合も
同じような性質がなりたたないか？

$E_1, E_2, \cdots$ を互いに共通部分を持たない可測集合列

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$$

完全加法性

可算無限個の和集合　　測度の可算無限個の和

和集合の測度は測度の和
可算無限個に分けた場合でもそうなる

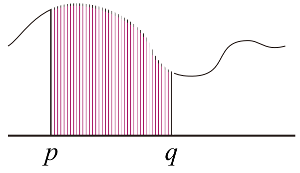
A. Asano, Kansai Univ.

零集合と
「ほとんどいたるところ」

A. Asano, Kansai Univ.

積分に対する疑問

どれだけ拡大してみても，
びっしりと直線がならんでいる



幅0の直線を可算無限個抜いても

積分の値は変わらないのか？

この疑問に答えるために，
pとqの間にある有理数全体が占める幅を
考える　　可算無限個ある

A. Asano, Kansai Univ.

有理数全体が占める幅

可算無限個ある有理数の幅を考えるには
ルベーグ測度の考え方が必要

有理数の集合が数直線上で持つ幅（測度）

有理数全体を，区間の組み合わせで覆ったときの

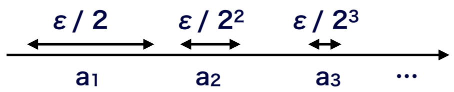
「区間の長さの合計」の下限

A. Asano, Kansai Univ.

有理数全体が占める幅

ε を任意の正の数とすると

有理数a_1, a_2, … を
こういうふうに覆うことができる



区間の長さの合計

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots = \varepsilon$$

その下限は0　　有理数全体のルベーグ測度は0

零集合と「ほとんどいたるところ」

有理数全体のルベーグ測度は0

測度が0の集合を**零集合**という

「測度が0の集合を除いた部分で」を
（この場合，「有理数を除いた部分で」）

「ほとんどいたるところで」（a.e.）という

今日のまとめ

ルベーグ外測度

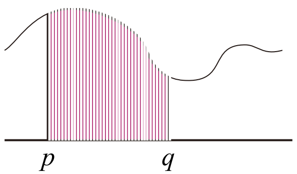
可算無限個の長方形で図形を覆った
ときの，長方形の面積の合計の下限
内測度と一致するとき　ルベーグ測度

零集合と「ほとんどいたるところ」

有理数の集合のルベーグ測度は0
測度0の集合を「零集合」という
零集合を除いた部分を
「ほとんどいたるところ」という

次回は

最初の疑問はまだ解決していない



有理数の位置にある**可算無限個**
の直線を抜いた積分

ジョルダン測度にもとづく積分では，
可算無限個の分割はできない

ルベーグ測度にもとづくルベーグ積分を考える