2016 年度秋学期　画像情報処理　第７回

第２部・画像情報圧縮／ 主成分分析と Karuhunen-Loève 変換

画像情報処理の第２部は，「直交変換による画像圧縮」について説明します。これは，画像のデータを「見た目に影響の大きい成分」と「あまり影響がない」成分に分け，あまり影響がない成分を省くことによって，画像の見た目の印象をあまり変えることなく画像のデータ量を減らすという方法です。このシリーズは，(1) データの「影響の大きい成分」と「あまり影響がない成分」という考え方を導くための主成分分析と Karuhunen-Loève(KL) 変換，(2)KL 変換やフーリエ変換などを一般的にとらえる行列のユニタリー変換，(3) ユニタリー変換の１つコサイン変換を使った画像圧縮と JPEG 規格の３回に分けて講義します。

視覚的に「重要な成分」と「あまり重要でない成分」

この節では，説明のために画素が２つしかない画像を考えます。そして，この２画素の画像をたくさん取り扱うという状況を考えてみましょう。当然，いろいろな画素値の組み合わせがあります。そこで，２つの画素値を x_1, x_2 として，これらの画像の分布を x_1, x_2 を軸とする座標平面に描いてみます（このような図を**散布図**といいます)。これが図１のようになったとしましょう。+印１つが１つの画像に対応します。図１の場合では，x_1, x_2 のどちらの分散も大きくなっています。「分散が大きい」とは「値がさまざまにばらついている」ということですから，このことは，x_1, x_2 のどちらも，各画像の違い（「個性」）をよく表現していることを意味しています。ですから，これらの画像を表現するためには，x_1, x_2 の両軸とも省略することはできません。

しかし，もしも画像の分布が図２のようであればどうでしょう。この場合，各画像の画素 x_1 の値はさまざまに異なっているのに対して，画素 x_2 はどの画像もあまり変わらない値になっています。したがって，図２の各画像の違いを表現するのには画素 x_1 だけが重要で，画素 x_2 はさほど重要ではなく，何か１つの値（例えば各画像の画素 x_2 の平均）で置き換えてしまっても，さほど困らないということになります。つまり，これらの画像は x_1 だけで概ね表現できるわけで，この考えでデータの量を半分にできます。

図２のような画像の分布を，図１のように画像が分布している場合でも作ることはできないでしょうか？

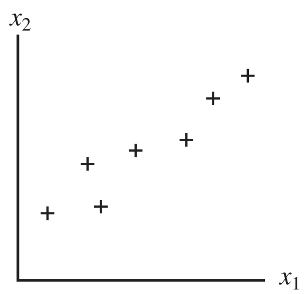


図 1: ２画素の画像の分布の例 (1)

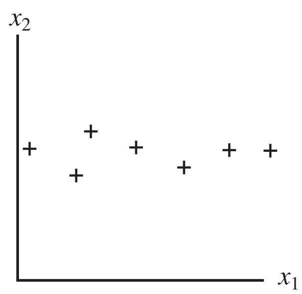


図 2: ２画素の画像の分布の例 (2)

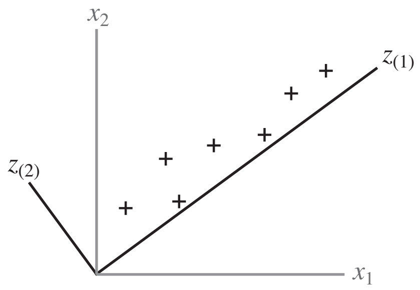
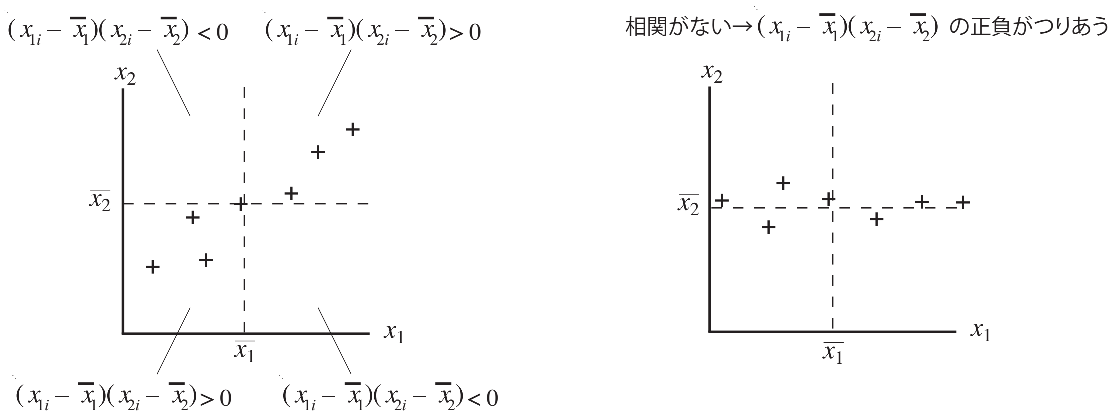


図 3: 軸の回転



(a) (b)

図 4: 共分散の意味。(a) 各象限での $(x_{1i}-\bar{x_1})(x_{2i}-\bar{x_2})$ の正負。(b) 相関がない時。

図 1 の画像の分布が，右上がりの斜め上向きの直線に沿って広がっていることに注目してください。このことは，図 1 の分布においては，x_1 が大きければ x_2 も大きいという傾向がある，すなわち「x_1 と x_2 に正の相関がある」ことを示しています。画像の場合でいえば，「画像はたいてい，全体に明るいか全体に暗いかという傾向がある」ということで，実際の画像についてもとくにおかしな状況ではありません。

正の相関に限らず，x_1 と x_2 に相関があるならば，図 2 のような画像の分布は，図 3 のように軸を回転することによって可能になります。このように x_1, x_2 軸を回転した $z_{(1)}, z_{(2)}$ 軸では，$z_{(1)}$ **の値の分散が最大**となっています[1]。このように画素 x_1, x_2 を新たな画素 $z_{(1)}, z_{(2)}$ に変換した場合，画素 $z_{(1)}$ は「重要な成分」，画素 $z_{(2)}$ は「あまり重要でない成分」ということになります。

主成分分析

このような変換後の座標軸，すなわち画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ を求めてみましょう。元の画素値 x_1, x_2 に対して，新しい画素値 z が

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 \tag{1}$$

[1]添字に () をつけているのは，x と z の添字の区別を明確にするためですが，このやりかたは一般的なものではありません。

で表されるものとします。i 番目の画像の画素 x_1, x_2 の値を x_{1i}, x_{2i} とすると，画素 x_1, x_2 の値の平均 $\bar{x_1}, \bar{x_2}$，分散 s_{11}, s_{22}，共分散 $s_{12} = s_{21}$ は，画像の数を n として次のように定義されます。

$$\overline{x_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}, \quad \overline{x_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i}, \quad s_{11} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \overline{x_1})^2, \quad s_{22} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{2i} - \overline{x_2})^2$$

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \overline{x_1})(x_{2i} - \overline{x_2}). \tag{2}$$

共分散 $s_{12} = s_{21}$ を（画素 x_1 の値の標準偏差）×（画素 x_2 の値の標準偏差）すなわち $\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}$ で割ったものが相関係数で，２つの軸の相関がないとき共分散は 0 となります。これは，次のように直感的に説明できます[2]。

図 4 のように，$\bar{x_1}, \bar{x_2}$ で散布図を 4 つに区切ります。このとき，右上・左下の区切りでは (2) 式の $(x_{1i} - \bar{x_1})(x_{2i} - \bar{x_2})$ は正となり，左上・右下では負となります。ですから，図 4(b) のように，x_1 と x_2 の間に相関がないときは，$(x_{1i} - \bar{x_1})(x_{2i} - \bar{x_2})$ の総和は，正負のものが打ち消しあって 0 になります。

さて，新しい画素値の分散 $V(z)$ は，上記の議論から次のように表されます。

$$\begin{aligned}
V(z) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(a_1x_{1i} + a_2x_{2i}) - (a_1\overline{x_1} + a_2\overline{x_{2i}})\}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(a_1(x_{1i} - \overline{x_1}) + a_2(x_{2i} - \overline{x_2})\}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(a_1^2(x_{1i} - \overline{x_1})^2 + 2a_1a_2(x_{1i} - \overline{x_1})(x_{2i} - \overline{x_2}) + (a_2^2(x_{2i} - \overline{x_2})^2\} \\
&= a_1^2\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \overline{x_1})^2\} + 2a_1a_2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \overline{x_1})(x_{2i} - \overline{x_2}) + a_2^2\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{2i} - \overline{x_2})^2\} \\
&= a_1^2s_{11} + 2a_1a_2s_{12} + a_2^2s_{22}
\end{aligned} \tag{3}$$

したがって，この $V(z)$ を最大にする a_1, a_2 を求めればよいわけです。ここで，θ_1, θ_2 を，z 軸がそれぞれ x_1, x_2 軸となす角として

$$a_1 = \cos\theta_1, \quad a_2 = \cos\theta_2 \tag{4}$$

とおくと，(a_1, a_2) は新しい座標軸 z の方向余弦ということになり，a_1, a_2 は

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 \tag{5}$$

を満たします。したがって，問題は (5) 式の条件のもとでの (3) 式の $V(z)$ の最大化ということになります。

このような制約条件付き最大化問題は，Lagrange の未定乗数法によって解くことができます。これによれば，この問題は未定乗数を λ とおいて

$$F(a_1, a_2, \lambda) = a_1^2s_{11} + 2a_1a_2s_{12} + a_2^2s_{22} - \lambda(a_1^2 + a_2^2 - 1) \tag{6}$$

[2]共分散については，私の「統計学」第 6 回の講義録を参照してください。この講義のスケジュールからリンクしてあります。

を最大化する制約条件なしの最大化問題に帰着されます。これを解くため，F を a_1, a_2, それに λ でそれぞれ偏微分して，それらが 0 に等しいとおくと

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial a_1} &= 2a_1 s_{11} + 2a_2 s_{12} - 2a_1\lambda = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial a_2} &= 2a_2 s_{22} + 2a_1 s_{12} - 2a_2\lambda = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= -\lambda(a_1^2 + a_2^2 - 1) = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

となります。ここで第 3 式は (5) 式と同じですから，すでに満たされています。残りの式からは，

$$
\begin{aligned}
a_1 s_{11} + a_2 s_{12} &= a_1\lambda \\
a_2 s_{22} + a_1 s_{12} &= a_2\lambda
\end{aligned} \tag{8}
$$

という関係が得られます。これを行列を使って書くと

$$
\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{9}
$$

となります。ここで左辺の行列は，**分散共分散行列** (covariance matrix) とよばれています。

(9) 式はすなわち「分散共分散行列の固有値を求める」問題で，これを満たす λ は固有値 (eigenvalue), $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ は固有ベクトル (eigenvector) とよばれています。このようにして画素値 x_1, x_2 から得られる新しい画素値 z の分散 $V(z)$ は，実は固有値 λ です。なぜならば，(8) 式の上の式に a_1 を，下の式に a_2 をかけると，

$$
\begin{aligned}
a_1^2 s_{11} + a_1 a_2 s_{12} &= \lambda a_1^2 \\
a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} &= \lambda a_2^2
\end{aligned} \tag{10}
$$

となります。さらに，

$$
a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} = \lambda(a_1^2 + a_2^2) \tag{11}
$$

となり，(3) 式と (5) 式から

$$
V(z) = \lambda \tag{12}
$$

が得られます。

固有値問題の解き方はここでは省略しますが[3]，(9) 式の 2 変数のベクトルの固有値問題では，固有値と固有ベクトルの組み合わせが 2 組得られます。この計算は新しい画素値 z の分散 $V(z)$ を最大にするもので，(12) 式で示したようにその値は固有値 λ ですから，2 組のうち固有値の大きいほうの組み合わせから，最大の分散をもつ画素値 $z_{(1)}$ が得られます。これを**第 1 主成分**といい，「もっとも重要な成分」ということができます。

ところで，(9) 式のとおり分散共分散行列は対称行列で，対称行列の固有ベクトルは直交することが知られています (線形代数学の教科書を見てください)。したがって，もう 1 つの固有値に対応する固有ベクトルから (1) 式の計算でもうひとつの新しい画素値 z を求め，これを $z_{(2)}$ とすれば，新しい画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ で新たな直交座標が得られ，図 3 のような座標軸の回転が行えることがわかります。この手法を**主成分分析** (principal component analysis, PCA) といいます。

[3] 私の「応用統計学」(広島大 2010 年度前期) 第 5 回の講義録を参照してください。このの講義のスケジュールからリンクしてあります。

主成分分析と行列の対角化

この計算の，もう少し先を見てみましょう。2つの固有値のうち，大きい方を $\lambda_{(1)}$，小さい方を $\lambda_{(2)}$ とし，それぞれ対応する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$ とします。これらはどちらも (9) 式をみたしますから，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} &= \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} &= \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

が得られます。この2つの式をひとつにすると，

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \tag{14}$$

となります。

ここで，上の式の各行列をそれぞれひとつの文字で表して，

$$SP = P\Lambda, \quad \text{すなわち} \quad \Lambda = P^{-1}SP, \ S = P\Lambda P^{-1} \tag{15}$$

と表します。このとき，行列 P に含まれる各固有ベクトルは，(5) 式で行ったように正規化されており，また S は対称行列なので各固有ベクトルは直交しています。すなわち，各固有ベクトルは正規直交基底をなしています。したがって P は正規直交行列です。P が直交行列のとき $P^{-1} = P'$ が成り立つので (これも線形代数学の教科書を見てください)，

$$P'SP = \Lambda, \quad \text{すなわち} \quad S = P\Lambda P', \tag{16}$$

となります。これを対称行列 S の**対角化** (diagonalization) とよんでいます。

ところで，第 1，第 2 主成分 $z_{(1)}, z_{(2)}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} z_{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ z_{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

と表されますから，この2つをまとめると

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

です。上の式に出てくる行列は，(14) 式・(15) 式での行列 P の定義と比べると，P' にあたることがわかります[4]。すなわち，行列 P' はもとの画像の画素値 x_1, x_2 を新たな画像の画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ に変換する行列となります。この形式による画像の変換を，画像の**直交変換** (orthogonal transformation) とよんでいます。

[4] 記号「$'$」はベクトル・行列の転置 (transposition) を表します。

また，(16) 式は，もとの画像 x_1, x_2 での分散共分散行列が，「一度画像 $z_{(1)}, z_{(2)}$ に変換して（P'）」，「固有値をならべた対角行列 Λ をとり」，「もう一度画像 x_1, x_2 にもどる（$(P')^{-1} = P$）」という操作で得られることを示しています。このことは，変換後の画像 $z_{(1)}, z_{(2)}$ については，分散共分散行列が対角行列 Λ で表され，共分散が全て 0，すなわち各画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ が互いに無相関であることを意味しています。

画素が p 個ある場合

ここまでは画素が２つの画像を考えましたが，では画素が p 個ある画像の場合を考えてみましょう。画像が画素 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ からなるとするとき，変換後の画素を

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p \tag{19}$$

で表して，z の分散を最大にする $a_1, a_2, \cdots, a_p$ を求めることを考えます。この問題は，２画素の場合と同様に

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \tag{20}$$

という分散共分散行列の固有値問題になります。ここで s_{ij} は x_i と x_j の共分散を意味します。また，前節の２変数の場合と同様に，(20) 式で求められる p 個の固有値は，各々変換後の画素値 z の分散になります。そこで，固有値を大きいほうから $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \ldots, \lambda_{(p)}$ とし，対応する変換後の画素を $z_{(1)}, z_{(2)}, \ldots, z_{(p)}$ とすると，$z_{(1)}$ が「分散が最大の成分」すなわち「もっとも重要な成分」で，$z_{(2)}$ はそれに直交する成分の中で分散が最大の成分，以下番号が進むにつれ重要さがだんだん落ちてゆくことになります。このとき $z_(k)$ を**第 k 主成分**とよびます。

さて，固有値 $\lambda_{(k)}$ に対応する固有ベクトルを $(a_{1(k)}, a_{2(k)}, \ldots, a_{p(k)})'$ とすると，変換後の「k 番目に重要な」画素値すなわち第 k 主成分 $z_(k)$ は (19) 式から

$$\begin{aligned} z_{(k)} &= a_{1(k)}x_1 + a_{2(k)}x_2 + \cdots + a_{p(k)}x_p \\ &= \begin{pmatrix} a_{1(k)} & a_{2(k)} & \cdots & a_{p(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

となります。このとき，(20) 式の分散共分散行列を S とすると，(20) 式から

$$S \begin{pmatrix} a_{1(k)} \\ a_{2(k)} \\ \vdots \\ a_{p(k)} \end{pmatrix} = \lambda_{(k)} \begin{pmatrix} a_{1(k)} \\ a_{2(k)} \\ \vdots \\ a_{p(k)} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{22}$$

がなりたちますから，$k = 1, 2, \ldots, p$ を合わせると，

$$S \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix} \tag{23}$$

が得られます。ここで，行列 P を，大きいものから順に並べた固有値に対応する固有ベクトルを並べた行列，すなわち

$$P = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \tag{24}$$

とし，さらに行列 Λ を

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix} \tag{25}$$

と定義します。これらの表現を用いると，(23) 式は

$$SP = P\Lambda,\ \text{すなわち}\ \ P^{-1}SP = \Lambda \tag{26}$$

と表されます。

このように行列をひとつの文字で表してしまうと，これはすでに説明した２画素の場合とまったく同じで，そのあとの直交変換に関する説明も，(21) 式を $k = 1, 2, \ldots, p$ についてまとめて

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} & \cdots & a_{p(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{p(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1(p)} & a_{2(p)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \tag{27}$$

とすれば，２画素画像の場合とまったく同じです。このように，行列の形にまとめることで，何画素の場合でも（ベクトルが何次元あっても）まったく同じように理解できるのが，行列という形式の大きな利点です。

Karhunen-Loève 変換

「第 k 主成分の分散の，分散の合計に対する割合」，すなわち $\lambda_{(k)}$ の $(\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \cdots + \lambda_{(p)})$ に対する割合を，第 k 主成分の**寄与率**といいます。つまり，寄与率は，最初の節で説明した「変換後の画素の重要さ」を表しています。

ここで，ある k 以降の主成分の寄与率が 0，あるいはほぼ 0 とみなせる場合を考えてみましょう。例えば，最初に述べた２画素の画像の例では，第 2 主成分の寄与率をほぼ 0 とみなすことができ，第２主成分に対応する軸の方向の分散がほぼ 0，すなわち変換後の画素値 $z_{(2)}$ の分散がほぼ 0 ということになります。つまり図 2 のように本来 2 画素で表現していた各画像については，$z_{(2)}$ は不要で $z_{(2)}$ の平均 $\bar{z}_{(2)}$ に置き換えてしまってもよく，１つの変量 $z_{(1)}$ だけで表現できることになります。

主成分分析では，なるべく第１，２，といった番号の若い主成分が分散がなるべく大きくなるように変換しています。いいかえれば，最後のほうの番号の主成分は寄与率がなるべく小さくなるようにしているわけで，最後のほうの番号の主成分を捨てて変換後の画素数を減らしたとき，元の画像との誤差が最

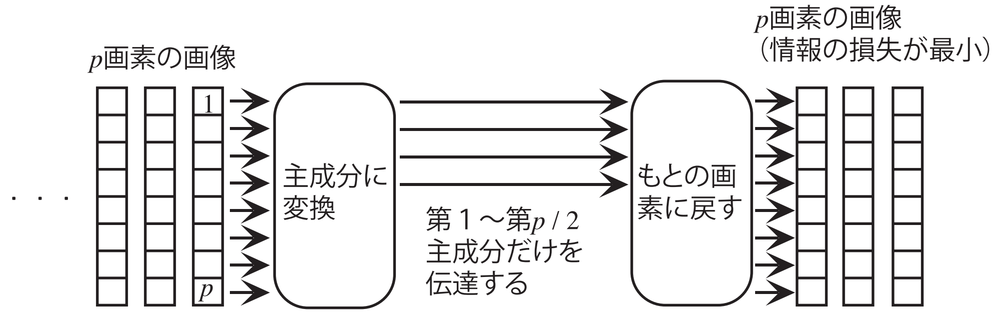


図 5: KL 変換による画像データの圧縮

小になります。主成分分析には，このようにして，もとのデータのもつ情報をなるべく損なわずにデータ量を減らすことができるという側面があります。

そこで，いま p 画素からなる画像が多数あるとします。これを伝達するのに，1 度に $p/2$ 画素しか使えないとしましょう。このときに情報をなるべく損なわずに伝達するには，どうすればよいでしょうか？それはここまで述べたように，画像を主成分に変換し，第 $(p/2)$ 主成分だけを伝達して，それ以外の成分は各成分の平均値だけを 1 回だけ伝達しておけばよいことがわかります。もとの画素値を各主成分に変換する (27) 式の直交変換を，この意味で用いるとき **Karhunen-Loève 変換（KL 変換）** とよんでいます。

この主成分を受け取ったほうでは，主成分への変換の逆変換（z から x への変換）を行って，元の画像にもどします。この逆変換は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \simeq (P')^{-1} \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix} \tag{28}$$

となります。こうすると，画素の数を 1/2 にしたときに情報の損失が最小になります。

しかし，この方法を用いるには，取り扱う全ての画像を調べて分散共分散行列を求める必要があります。**一般的にはそれは不可能**です。つまり，これから取り扱う画像がどんな画像かわからなければ KL 変換はできませんが，そんなことはわかるはずもありません。

そこで，主成分のかわりに，あらかじめ適当な基底ベクトルを決めておき，情報の損失を「最小ではなくともなるべく少なくする」方法が広く用いられています。次回，次々回の講義で説明します。