2016 年度秋学期　画像情報処理　第１０回

第３部・マセマティカル・モルフォロジ／ 画像の集合演算とオープニング

マセマティカル・モルフォロジについて

この講義の第３部は，ここまでとは大きく違って，画像に写っている物体の「形状」を扱う数理的手法である**マセマティカル・モルフォロジ** (mathematical morphology，以下モルフォロジ) について説明します。これは，画像中の物体の形状に影響する作用を簡単な集合演算にもとづいて表現することで，形状への作用の定量的な取り扱いを可能にするものです。

モルフォロジの “morpho-” は，ギリシャ語の「形，形状」を意味する言葉からきた語幹で，画像処理の世界では，ある画像を別の画像に滑らかに変形する技術である “morphing” という言葉にも現れています。また，“morphology” という言葉は，生物学・言語学・地質学でも「形態学，形態論」という意味で用いられています。

モルフォロジの創始者である G. Mathéron と J. Serra は，フランスのパリ国立高等鉱山学校 (École des Mines de Paris) の研究者で，当初は鉱石に分布する鉱物の幾何学的特性を評価する方法として，モルフォロジを着想したそうです。Mathéron は，鉱石中の鉱物のようなランダムな図形を扱うランダム閉集合理論と，鉱床のような空間分布を記述・予測する統計的手法であるクリギング (kriging) の創始者でもあります。モルフォロジは，創始から 40 年を経て，これらの理論とあいまって，物体の空間的な形・大きさを取り扱う理論的枠組みとして発展してきています。また，モルフォロジだけをテーマとする国際会議 “International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)” がほぼ２年に１度開かれています。

この講義の第３部では，１回目で，画像を集合として取り扱う考え方とモルフォロジの基礎演算である**オープニング**を，２回目で，物体の「大きさ」を定量的に取り扱う **granulometry** と物体の骨組みの形を取り出す**スケルトン**を，そして３回目は，ほとんどの画像フィルタがモルフォロジで表現できるという**フィルタ定理**について述べます。

オープニング

モルフォロジのもっとも基本となる演算は**オープニング** (opening) です。これは，物体の一部を，そのサイズによって選別して取り出す演算です。まず，２値画像（画素値が 1 と 0 だけの画像）についてオープニングを説明し，その後多値の場合を説明します。

モルフォロジでは，２値画像中の物体は，物体を構成する点を表すベクトルの集合と考えます。離散的なディジタル画像を考える場合は，２値画像は白画素（画素値が 1）の集合と考えることができます。さらに，画像を操作するためのもうひとつの画像集合を考え，これを**構造要素** (structuring element) とよびます。構造要素は，ふつうは処理対象の画像よりもずっと小さいものを想定しています。

さて，処理対象の画像を集合 X とし，構造要素を集合 B とします。このとき，X の B によるオープニングは，次のような効果を表します。

$$X_B = \{B_z \,|\, B_z \subseteq X, z \in \mathbb{Z}^2\}. \tag{1}$$

ここで，B_z は B を z だけ**移動**したもの (translation) で，次のように定義されます。

$$B_z = \{b + z \,|\, b \in B\}. \tag{2}$$

図 1: オープニングの効果

(1) 式は，X の B によるオープニングは B が X の内部すべてを動くときの B 自身の軌跡（B が通った跡）で，オープニングの結果，B よりも小さな白い部分が除かれる，ということを意味しています（図 1)。オープニングは，構造要素よりも小さい構造や小さな白い点を除くので，定量的なスムージング能力を持っています。また，X と X_B との差は，B の軌跡では描くことのできなかった部分ですから，X のうち構造要素よりも小さな構造ということになります。

オープニングを分解

(1) 式によるオープニングの表現は，直観的にはわかりやすいのですが，「構造要素自体の軌跡」ということになっているため，各画素に対して 1 または 0 を出力する形にはなっていません。そこで，オープニングをさらに簡単な画素毎の演算に分解します。ここでは，オープニングを **Minkowski 集合差** (Minkowski set subtraction) と **Minkowski 集合和** (Minkowski set addition)，およびそれぞれから派生する**エロージョン** (erosion) と**ダイレーション** (dilation) という演算に分解します。

ミンコフスキー集合差は

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_b, \tag{3}$$

と定義され，集合和は

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b. \tag{4}$$

と定義されます。

ところで，あるベクトル x が X_b に含まれる，すなわち $x \in X_b$ のとき，$x - b \in X$ です。このことを使うと，(3) 式の集合差の定義は，次のような画素毎の演算に書き直せます。

$$X \ominus B = \{x | x - b \in X, {}^{\forall} b \in B\}. \tag{5}$$

また，B の**反転** (reflection)$\check{B}$ を，次のように定義します。

$$\check{B} = \{-b | b \in B\}. \tag{6}$$

上の 2 つの式から，$X \ominus B = \{x | x + (-b) \in X, {}^{\forall}(-b) \in \check{B}\}$，すなわち「構造要素 B に含まれるベクトルにそって X をとなるので，集合差は次のように表されます。

$$X \ominus B = \{x | \check{B}_x \subseteq X\}. \tag{7}$$

なぜならば，(6) 式の反転の定義から，$\check{B}_x = \{-b + x | b \in B\}$ であることがわかります。よって，$\check{B}_x = \{x - b | b \in B\}$ となります。この式を (5) 式に代入すると，(7) 式の関係が得られます。この関係は，$X \ominus B$ は，$\check{B}$ が X の内部をくまなく動き回ったときの，$\check{B}$ の原点の軌跡であることを示しています。

集合和については，

$$\bigcup_{b\in B} X_b = \{x+b|x\in X, {}^\forall b\in B\} \tag{8}$$

となるので，

$$X\oplus B = \{b+x|b\in B, x\in X\} = \bigcup_{x\in X} B_x. \tag{9}$$

となります。このことは，$X\oplus B$ は，B のコピーを X 内部のすべての点に貼付けることで構成されることを示しています。

これらの演算を用いて，X の B によるエロージョンを $X\ominus \check{B}$ と，またダイレーションを $X\oplus\check{B}$ と定義します。

(7) 式から，

$$X\ominus\check{B} = \{x|B_x\subseteq X\} \tag{10}$$

であることがわかります。このことは，$X\ominus\check{B}$ は，B が X の内部をくまなく動き回ったときの，B の原点の軌跡であることを示しています。

以上の基本演算を用いて，オープニング X_B は，次のように分解されます。

$$X_B = (X\ominus\check{B})\oplus B. \tag{11}$$

（証明） X_B はここで $(X\ominus\check{B})\oplus B$ と定義され，これは $\bigcup_{z\in X\ominus\check{B}} B_z$ と同じです。また，(1) 式では $X_B = \{B_z|B_z\subseteq X\}$ なので，$z\in X\ominus\check{B} \Leftrightarrow B_z\subseteq X$ を証明すれば十分です。

(1) $[z\in X\ominus\check{B}\Rightarrow B_z\subseteq X]$:
すべての $b\in B$ について，$(-b)\in\check{B}$ である。
すべての $(-b)\in\check{B}$ について，$z\in X\ominus\check{B}\Rightarrow z-(-b)\in X$ であるから，
すべての $b\in B$ について，$z\in X\ominus\check{B}\Rightarrow b+z\in X$ となる。
一方，$b\in B\Leftrightarrow b+z\in B_z$ である。ゆえに $z\in X\ominus\check{B}\Rightarrow B_z\subseteq X$.

(2) $[B_z\subseteq X\Rightarrow z\in X\ominus\check{B}]$:
すべての $b\in B$ について，$B_z\subseteq X\Rightarrow b+z\in X$.
$\Rightarrow$ すべての $(-b)\in\check{B}$ について，$z-(-b)\in X$.
$\Rightarrow z\in X\ominus\check{B}$. ■

オープニングの分解の意味を，図 2 を用いて説明します。この図で，●は物体を構成する画素を表しています。上で示した通り，X の B によるエロージョンとは「B を X の内部に収まる範囲でくまなく動かしたときの，B の原点の軌跡」ですから，第 1 段階のエロージョンでは，X の内部で，B をはみ出さずに配置できる場所が求められます。さらに，第 2 段階の Minkowski 和は，これも上で示したとおり，「$X\ominus\check{B}$ の内部の各点に，それぞれ B のコピーを貼り付けたもの」です。したがって，X の B によるオープニングは「X からはみださないように，B を X の内部でくまなく動かしたときの，B そのものの軌跡」ということになり，最初の説明と同じになります。すなわち，オープニングは「X から，B が収まりきらないくらい小さな部分だけを除去して，他はそのまま保存する」という作用を表しています。この図はまた，オープニングと「エロージョンに続いてダイレーション」することとの違いを表しています。

オープニングの対になる演算が**クロージング**で，次のように定義されます。

$$X^B = (X\oplus\check{B})\ominus B. \tag{12}$$

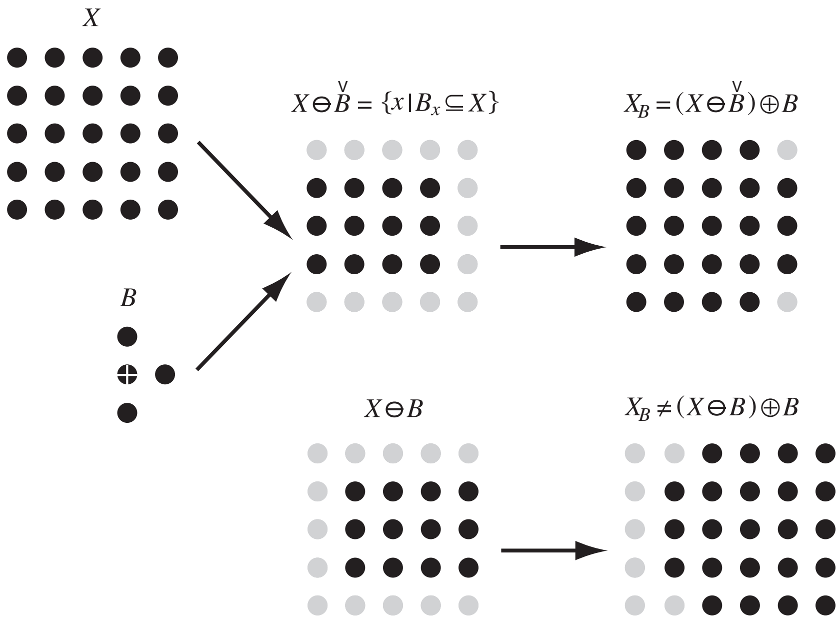

図 2: オープニングの分解

クロージングは，画像中で「物体でない部分」つまり背景に対してオープニングを行なう演算で，「画像中の物体にある，構造要素よりも小さな穴や欠けを埋める」作用を表します。それは，オープニングとクロージングの間に，次の関係があるからです（証明略)。

$$[X^B]^c = (X^c)_B. \tag{13}$$

ここで，X^c は X の補集合で，$\{x|x \notin X\}$ と定義されます。(13) 式の関係を，オープニングとクロージングの**双対性** (duality) といいます[1]。集合和と集合差の間にも，$X \oplus B = (X^c \ominus B)^c$ という双対性があります（証明略)。

図 3 に，エロージョン，ダイレーション，オープニング，クロージングの効果を示します。オープニングが構造要素より小さな物体を取り除くこと，クロージングが構造要素より小さな穴やすき間を埋めることがわかります[2]。

グレースケール画像への拡張

グレースケール画像（モノクロ画像，画素値がある範囲の整数をとる）の場合は，画像を**陰影** (umbra) を使って定義します。$x \in \mathbb{Z}^2$ を画素の位置として，そこでの画素値が $f(x)$ で表されるとき，陰影 $U[f(x)]$ を次のように定義します。

$$U[f(x)] = \{(x,t) \in \mathbb{Z}^3 \mid -\infty < t \leq f(x)\}. \tag{14}$$

すなわち，2 次元の画像に対して，画素値を 3 次元めの座標として，各画素値が各画素での高さになっているような「立体」を考えるとき，陰影は，その立体および立体の底から下すべての部分に相当します（図 4)。

[1] オープニングを $X \circ B$，クロージングを $X \bullet B$ と書くやりかたもあります。

[2] モルフォロジの基本演算の定義には，本文にあげたものの他に，本文のエロージョンを $X \ominus B$ で表してそのままエロージョンとよび，本文の集合和のことをダイレーションとよぶというやりかたがあります。この定義では，エロージョンとダイレーションが双対でないことになりますが，一方で，オープニングは $(X \ominus B) \oplus B$ すなわち「エロージョン + ダイレーション」と簡単に表されるという利点があります。

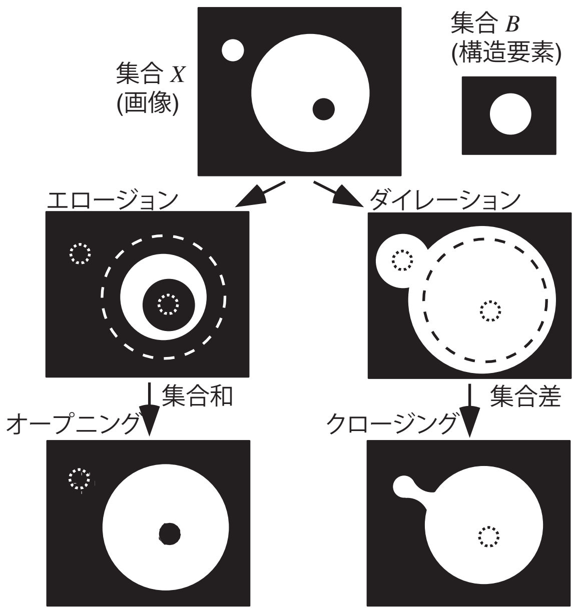

図 3: エロージョン，ダイレーション，オープニング，クロージングの効果

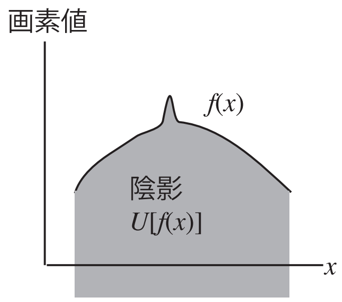

図 4: 陰影. 画像は本来２次元であるが，ここでは，簡単のため，１次元の座標 x で表現している．

グレースケールの構造要素も，同じように陰影で定義します。このとき，$f(x)$ を画像の画素 x での画素値，$g(y)$ を構造要素の画素 y での画素値とすると，f の g によるエロージョンは，それぞれの陰影を使って２値画像の場合と同様に定義され，結局次のような下限演算（整数の画素値なら最小値と同じ）に帰着されます。

$$\{f \ominus \check{g}\}(x) = \inf_{b \in w(g)} \{f(x+b) - g(b)\}. \tag{15}$$

ダイレーションも同様に，

$$\{f \oplus \check{g}\}(x) = \sup_{b \in w(g)} \{f(x+b) + g(b)\}. \tag{16}$$

という上限（最大値）演算に帰着されます。ここで，$w(g)$ は g の存在する範囲（サポート）を表します。これらの演算をみると，２値画像の演算における論理積・論理和が，グレースケール画像の演算ではそれぞれ下限・上限に置きかわっていることがわかります。

参考文献

浅野晃，“マセマティカルモルフォロジーの思想”，*Fundamentals Review,* **4,** 2, 113-122 (2010. 10).
(講義のページからリンクしています)