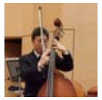
2018年度秋学期　応用数学（解析）　第２回

第1部・「無限」の理解

無限にも大小がある

浅野　晃
関西大学総合情報学部



無限とは
「モノ」ではなく「コト」

「∞」という数字があるのか

「∞」という数字はありません

無限とは
「無限」という「モノ」があるのではなく
「無限であるコト」

数学では，「コト」ではなく
「モノ」のほうが扱いやすい。

「無限」を具体的な数字で扱うには？

「数えられる」無限

1, 2, 3, … ⟵ そして，「無限」

自然数とは，数えるための数字

？

自然数の集合と同じ無限を
「数えられる無限」すなわち
［可算無限］という

その「個数」は［可算基数］$\aleph_0$（アレフゼロ）
（よく「可算無限個」という）

どうやって数えるのか

自然数と対応がつく集合は数えられる

自然数　1, 2, 3, $\cdots$

↕ ↕ ↕ ↕

集合A = {a, b, c, $\cdots$}

1 対 1 対応がつく
（［全単射］が
存在する）なら

この集合の［基数］（［濃度］）は $\aleph_0$
［可算無限集合］という

A. Asano, Kansai Univ.

偶数の集合の濃度は

偶数と自然数とは対応がつくか

自然数　1, 2, 3, $\cdots$, n, $\cdots$

↕ ↕ ↕ ↕

偶数　2, 4, 6, $\cdots$, 2n, $\cdots$

1 対 1 対応がつく
（全単射が存在する）

偶数の基数も $\aleph_0$

自然数と「個数」は同じ

A. Asano, Kansai Univ.

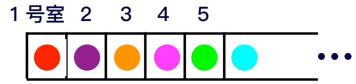
「ホテル無限」

A. Asano, Kansai Univ.

ヒルベルトの「ホテル無限」

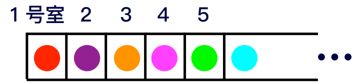
ホテル無限には，可算無限個の部屋がある

「ただいま
満室です」



さらに客が一人やって来たら？

部屋にいる客全員が
隣の部屋に移れば
1号室が空く



A. Asano, Kansai Univ.

実数の基数と
対角線論法

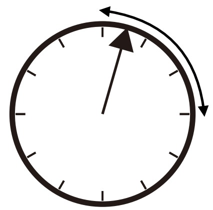
A. Asano, Kansai Univ.

時計の針の止まる場所

連続的に針が進む時計

ボタンを押すと，その場で針が止まる

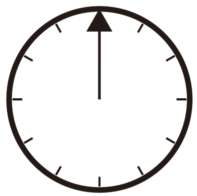
目をつぶって
ボタンを押したとき



12時から3時の間のどこかに
止まる確率
＝円周の1/4だから，確率も1/4

時計の針の止まる場所

では「12時ちょうど」に止まる確率は？



「12時ちょうど」の幅はゼロ
→そこに止まる確率もゼロ

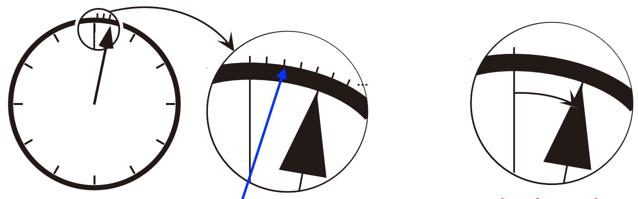
12時ちょうども　　どこでも
1時ちょうども　　みんな
12時1秒ちょうども　　ゼロ

なら，「12時から3時の間のどこか」もゼロ
じゃないの？

何がおかしいのか

各刻みに止まる確率は
どれもゼロ

区間内の任意の位置
＝１つの実数で表される角度



刻みがどんなに細かくても，
順に自然数の番号がつけられる

角度を表す実数と
一対一対応がつくなら，
「区間内のどの位置に
止まる確率も0」

自然数と実数に一対一対応がつくか？
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

実数は可算無限ではない

自然数と実数に一対一対応がつくか？
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

いいえ。

実数を1つ，2つ，3つと
数えることはできない

実数も自然数もその「個数」は無限だが，
実数は自然数よりも本質的に大きな無限

カントールの対角線論法

仮に，すべての実数を1番，2番，…と番号をつけて並べられるとする

1番　0. 1 2 3 4 5 6 …
2番　0. 8 9 3 1 2 9 …
3番　0. 2 3 0 4 9 0 …
⋮

0.190…

対角線上の数字を並べた実数をつくる

0.201 …

各ケタを1ずつずらす

カントールの対角線論法

すべての実数を1番，2番，…と番号をつけて並べた表

1番　0. 1 2 3 4 5 6 …
2番　0. 8 9 3 1 2 9 …
3番　0. 2 3 0 4 9 0 …
⋮

各ケタを1ずつずらした数　0. 2 0 1 …

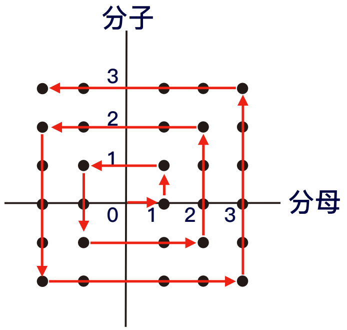
この数字は，
1番の数字とは1ケタめで，
2番の数字とは2ケタめで，…
n番の数字とはnケタめで
1だけずれているので，
「すべての実数を並べた」表にない　∴矛盾

つまり
「実数は可算でない」

有理数の集合は可算基数をもつか

有理数と自然数の対応（問題1）

有理数の集合は，可算基数をもつか



分母を横軸，
分子を縦軸とすると，
有理数は図の黒点
（格子点）

※分母0の点は除く　※重複あり

すべての格子点を一筆でたどれば
自然数と一対一対応がつく👉可算基数をもつ

A. Asano, Kansai Univ.

有理数は可算基数をもつから

有理数の「無限」と
自然数の「無限」は　同じ無限

有理数の「無限」と
実数の「無限」は　本質的に異なる無限

有理数の集合は「稠密」（びっしり）
実数　の集合は「連続」（べったり）

A. Asano, Kansai Univ.

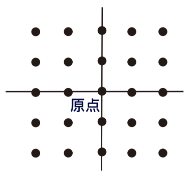
有理数は可算基数をもつから

時計⏰の針と同じ理屈で考えると

ダーツの矢（太さゼロ）を投げたら🎯

原点からの距離が
有理数である確率はゼロ

原点から光線（幅ゼロ）を
あちこちに発射したら



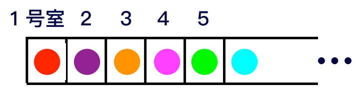
格子点に当たる確率はゼロ

A. Asano, Kansai Univ.

問題2

ホテル無限には，可算無限個の部屋がある

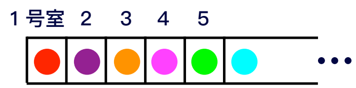
「ただいま
満室です」



$\aleph_0$

さらに可算無限人の客がやって来たら？

部屋にいる客全員が
２倍の番号の部屋に
移れば
奇数番の室が空く



奇数も可算無限個

A. Asano, Kansai Univ.

今日のまとめ

「可算無限」

無限にも，大小がある

次回は「実数」とは何かを
説明します。