2018年度秋学期　応用数学（解析）　第５回

第２部・基本的な微分方程式

微分方程式とは・変数分離形

浅野　晃

関西大学総合情報学部

微分方程式とは🤔

微分方程式とは

ふつうの方程式は，解は「数」

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

微分方程式は，**解が「関数」で，その微分が含まれる方程式**

x が t の関数（つまり $x(t)$）のとき，

$x' = x$　　関数は「量の変化」

$x'' - 5x' + 6x = 0$　　微分方程式は「変化の条件」

微分方程式を解くと，「どう変化するか」がわかる

1階・２階，常微分・偏微分

1 階導関数に関する微分方程式：

1 階微分方程式　$x' = x$

2 階導関数に関する微分方程式：

2 階微分方程式　$x'' - 5x' + 6x = 0$

⋮

１変数関数の微分方程式は**常微分方程式**

２変数以上の関数の偏微分に関する微分方程式は**偏微分方程式**

微分方程式を解くとは

微分方程式を「解く」とは，
その方程式を満たす関数を見つけること

微分方程式は
特定のパターンのものしか解けない

解ける微分方程式の基本的なパターンを
いくつか紹介します。

微分方程式の例🤔

運動方程式

物体に働く力と，その運動との関係

力 F
物体の質量 m
物体の加速度 a

$$F = ma$$

加速度は速度の微分，
速度は位置の微分だから，

$$F = mx''$$

時刻 t の物体の位置を $x(t)$
とすると

これを解いて関数 $x(t)$ を求めると，
時刻 t での物体の位置がわかる

落下の問題

物体が空気中を落下するとき

力 F
＝下向きの重力 mg
＋上向きの抵抗力

抵抗力は速度の２乗に比例する　$-k(x')^2$

運動方程式は
$F = mx''$ なので

$$mg - k(x')^2 = mx''$$

放射性物質の崩壊

崩壊の速度は，現在存在する物質の量に比例する

時刻 t の時点で存在する物質の量を $x(t)$ とすると

$$x' = -kx$$

A. Asano, Kansai Univ.

一般解・特殊解・特異解🤔

A. Asano, Kansai Univ.

一般解と特殊解

時刻 t の時点で存在する物質の量を $x(t)$ とすると

$$x' = -kx$$

定数 k が決まったら，解はひとつの関数に決まるか？

決まらない
最初 $t = 0$ に存在する物質の量 $x(0)$ が
わからないと
解はひとつに決まらない

初期値という

A. Asano, Kansai Univ.

一般解と特殊解

初期値が定まったときに求められる解を
特殊解(particular solution)
という

初期値が定まっていないとき，
初期値を代入したらひとつの特殊解が求められる
ような形の解を
一般解(general solution)
という

例： $x(t) = C\exp(-kt)$

初期値が定まってはじめて決まるパラメータ

A. Asano, Kansai Univ.

特異解と解の一意性

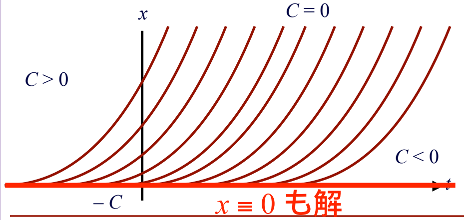
$x' = x^{\frac{1}{3}}$ の一般解 $x = \{\frac{2}{3}(t+C)\}^{\frac{3}{2}}$ (C は定数)

(なぜならば) $x' = \frac{3}{2}\{\frac{2}{3}(t+C)\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}$

$= \{\frac{2}{3}(t+C)\}^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}}$

一般解

$x = \{\frac{2}{3}(t+C)\}^{\frac{3}{2}}$



でも，$x \equiv 0$ も解では？

一般解 $x = \{\frac{2}{3}(t+C)\}^{\frac{3}{2}}$ には

Cをどう変えても含まれない

特異解(singular solution)という

A. Asano, Kansai Univ.

特異解と解の一意性

初期値がひとつ定まったときに，
解がひとつだけに決まることを，
解が一意(unique)であるという

一意性の十分条件のひとつ「リプシッツ条件」

微分方程式が $x'(t) = f(t, x)$ のとき，
初期値のまわりでどんな x_1, x_2 についても

$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqq L|x_1 - x_2|$

となる定数 L があるなら，その初期値について一意

x のわずかな変化について，
f がいくらでも大きく変化する，ということはない

A. Asano, Kansai Univ.

変数分離形🤔

A. Asano, Kansai Univ.

変数分離形

$x' = -kx$ を解く

$\frac{dx}{dt} = -kx$ と直す　$x \neq 0$ として　$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -k$ と変形する

両辺を t で積分　$\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \int (-k)dt$

置換積分をする　$\int \frac{1}{x}dx = \int (-k)dt$

積分を解く

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int k dt$$

$$\log|x| + C_1 = -kt + C_2$$

C_1, C_2は
積分定数

A. Asano, Kansai Univ.

変数分離形

$x' = -kx$ を解く

積分を解く
$$\int \frac{1}{x}dx = -\int k dt$$
$$\log|x| + C_1 = -kt + C_2$$

$$\log|x| = -kt + (C_2 - C_1)$$
$$x = \pm\exp\{-kt + (C_2 - C_1)\}$$
$$x = \pm\exp(C_2 - C_1)\exp(-kt)$$

$\pm\exp(C_2 - C_1)$ をあらためて定数 C とすると

一般解は $x(t) = C\exp(-kt)$

さっき $x \neq 0$ としたが，$x \equiv 0$ も解で，一般解に含まれる。

A. Asano, Kansai Univ.

変数分離形

$x' = -kx$ を解くとき，ふつうは

$\dfrac{dx}{dt} = -kx$ から　$\dfrac{dx}{x} = -kdt$　と，分数の計算のように変形し

$$\int \frac{1}{x}dx = \int (-k)dt$$ と積分する

x が左辺，t が右辺に分離しているので
変数分離形という

A. Asano, Kansai Univ.

変数分離形

一般には $g(x)x' = f(t)$

$x' = \dfrac{dx}{dt}$ とすると　$g(x)dx = f(t)dt$

両辺それぞれを
積分すると
$$\int g(x)dx = \int f(t)dt + C$$

一般解に含まれる積分定数 C は，
初期値を代入して定まり，特殊解が得られる

A. Asano, Kansai Univ.

例題

A. Asano, Kansai Univ.

例題

$9x \cdot x' + 4t = 0$ を解いて

一般解を求めよ。

$x(3) = 2$ とするときの特殊解を求めよ。

$x' = \frac{dx}{dt}$ として変数分離すると　$9x dx = -4t dt$

両辺それぞれを積分すると　$\frac{9}{2}x^2 = -2t^2 + C_0$

すなわち　$\frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = C_1$

（ $t-x$ 平面の楕円群）

例題

$9x \cdot x' + 4t = 0$ を解いて

一般解を求めよ。

$x(3) = 2$ とするときの特殊解を求めよ。

一般解は　$\frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = C_1$

初期値が $x(3) = 2$ なので

$t = 3$ のとき $x = 2$ だから，代入すると $C_1 = 2$

特殊解は　$\frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 2$

今日のまとめ

微分方程式は，関数とその微分に関する方程式

解は数ではなく関数

解ける方程式のパターンは限られている

もっとも基本的なパターン

「変数分離形」