2018 年度秋学期　応用数学（解析）　第１２回

第４部・[「その先の解析学」への導入／　複素関数論 (1) 複素関数・正則関数

今回と次回は，複素関数論の要点を説明します。ふつうなら半年間の講義で扱う内容を２回の講義で説明しますので，細かい内容は抜きにして，複素関数とその微積分について概略を説明します。詳しくは，参考文献を参照してください。

複素数と複素関数

複素数とは，どんな２次方程式でも必ず解が存在するように，$i = \sqrt{-1}$ として $x + yi$（x, y は実数）の形で表される数として導入されたものです。複素数に対して定義された関数が**複素関数**です。

複素数 $z = x + yi$ について，x を**実部**，y を**虚部**といいます。複素数や複素関数は，実部を横軸（実軸），虚部を縦軸（虚軸）であらわす**複素平面**（ガウス平面）で考えると理解しやすくなります（図 1）。

ひとつの複素数は，複素平面でのひとつの点で表されます。図１に示すように，複素数 z は，原点からその点までの長さ r と，原点からその点に向かう直線と実軸とがなす角 θ を使って，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表すこともできます。r を複素数 z の**絶対値**，θ を**偏角**といいます。なお，２つの複素数の間で，絶対値には大小関係がありますが，複素数そのものの間には大小関係はありません。

ところで，実数の指数関数 e^x を，$x = 0$ のまわりでテイラー展開（つまりマクローリン展開）すると，

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{1}$$

となります。これにならって，複素数 z について指数関数 e^z を

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{2}$$

と定義します。ここで $z = i\theta$ とすると，

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots) + i(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots) \end{aligned} \tag{3}$$

で[1]，上式の実部は $\cos\theta$ のテイラー展開，虚部は $\sin\theta$ のテイラー展開ですから，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4}$$

であることがわかります。よって，図１の複素数は $z = re^{i\theta}$ と表すことができます。また，$\theta = \pi$ のとき $\cos\pi = -1$，$\sin\pi = 0$ ですから，$e^{i\pi} = -1$，すなわち $e^{i\pi} + 1 = 0$ という**オイラーの等式**が得られます。

---

[1] 本当は，こんなふうに級数の項の順序を入れ替えてもよいことを示すには，この級数が「絶対収束」する（各項の絶対値を項とする級数が収束する）ことを言わなければなりません。

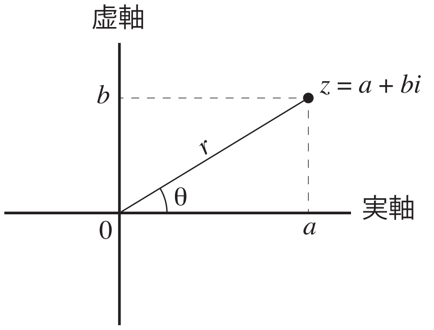

図 1: 複素平面

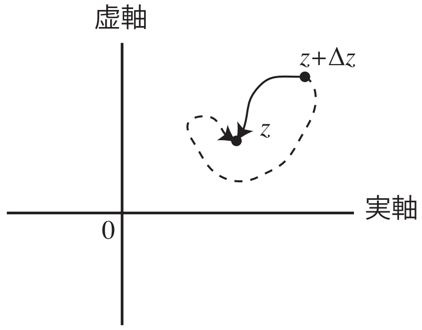

図 2: $z + \Delta z$ から z への近づき方

複素関数と微分，正則関数

複素関数 $f(z)$ の微分は，実関数の場合と同様に

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{5}$$

と定義します。複素平面の領域 D で複素関数 $f(z)$ が微分可能であることを，$f(z)$ は D で**正則**であるといいます。

重要なのは，「複素関数 $f(z)$ がある点 z で微分可能である」ことは，「$z + \Delta z$ が，**複素平面でどの方向からどのように z に近づいても，上記の極限値がひとつに定まる**」ことである，ということです。このことは，複素関数が微分可能であることが，関数の形においてかなりの制約であることを意味しています。

正則関数のイメージとしては，複素平面の上で軟らかい板を「ぐにゃぐにゃと」「どこにも折り目がなく」曲げたようなものを想像するとよいと思います。実際，正則関数は何回でも微分可能です（後述）。また，複素平面の領域 D で定義された正則関数 $f(z)$ は，D 内の点 a を中心として D に含まれる円内で，

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots \tag{6}$$

というテイラー展開であらわされます。

コーシー・リーマンの関係式

コーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の関係式は，複素関数の微分可能性を別の形で表したもので，次のように表されます。

> 複素数 $z = x + yi$ の関数 $f(z)$ が，x, y の実関数 $u(x, y), v(x, y)$ を使って $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表される時，$f(z)$ が正則であるための必要十分条件は，
>
> $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} &= \dfrac{\partial v}{\partial y} \text{ かつ} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} &= -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{7}$$
>
> がなりたつことである。

この関係式は，(5) 式で示した複素関数の微分可能性の定義で「どの方向からどのように z に近づいても極限値がひとつに定まる」ことに強く関連しています。

(5) 式の「$z + \Delta z$ が z に近づく」ときの近づき方について，

1. 実軸にそって近づく，すなわち $(x + \Delta x) + yi \to x + yi$
2. 虚軸にそって近づく，すなわち $x + (y + \Delta y)i \to x + yi$

の２つの場合を考えてみましょう。1. の場合については，$f'(z)$ は

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y)\} - \{u(x,y) + iv(x,y)\}}{((x+\Delta x) + yi) - (x + yi)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned} \tag{8}
$$

で，2. の場合については

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y)\} - \{u(x,y) + iv(x,y)\}}{(x + (y+\Delta y)i) - (x + yi)} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \\
&= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned} \tag{9}
$$

となります。どちらの近づき方でも $f'(z)$ は同じになりますから，実部・虚部を比較することで，(7) 式の関係が得られます。

複素関数の積分

実関数 $f(x)$ の積分（リーマン積分）は，積分区間 $[a, b]$ に分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を設定し，ξ_i を $x_i \leqq \xi_i < x_{i+1}$ を満たす任意の値とするとき，

$$
\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{10}
$$

で定義されます。正確には，この極限は「隣接する分点の間隔の最大値 $\max_i(x_{i+1} - x_i)$ を 0 に近づけるようにして，$n \to \infty$ としたときの極限」です。

実関数の場合は，積分区間をとる場所は x 軸上に決まっていますが，複素関数の場合は，積分区間だけでなく，複素平面上のどの経路を通って積分するかを考える必要があります。

そこで, 経路 C をパラメータ表示を使って $z = z(t)$ と表します。この経路上に分点 $a = z(t_0), z(t_1), \ldots, z(t_n) = b$,（$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$）となるように配置し，$\xi_i$ を C 上で $z(t_i)$ と $z(t_{i+1})$ の間にある任意の点とすると

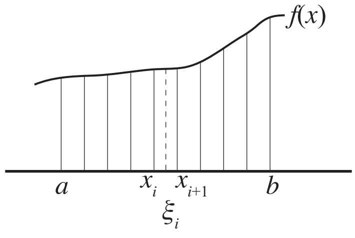

図 3: 実関数の積分（リーマン積分）

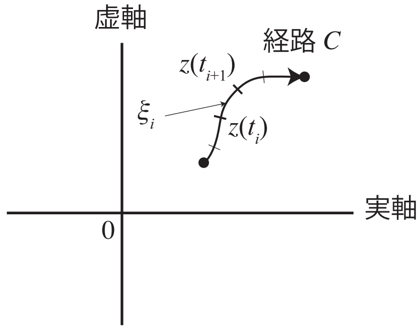

図 4: 複素関数の積分

き，$f(z)$ の C にそった積分を

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(z(t_{i+1}) - z(t_i)) \tag{11}$$

と定義します。実関数の場合と同様に，正確には，この極限は「隣接する分点間の，差の絶対値の最大値 $\max_i |z(t_{i+1}) - z(t_i)|$ を 0 に近づけるように，$n \to \infty$ としたときの極限」です。

正則関数と積分，コーシーの積分定理

前節のように，複素関数の積分は，積分区間の両端の値だけでなく，途中の経路を指定しないと求められません。しかし，正則関数の場合は，積分が経路によらず両端の値だけによる場合があります。

> 連続な関数 $f(z)$ が領域 D で定義されているとし，それが正則関数 $F(z)$ の微分である，すなわち $F'(z) = f(z)$ であるとする。このとき，２点 a, b とその間の経路 C がすべて D の内部になるならば，
>
> $$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a) \tag{12}$$
>
> となり，経路 C には依存しない。

証明は以下の通りです。経路 C を $z = z(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, $z(0) = a$, $z(1) = b$ で表します。すると，合成関数の微分によって

$$\frac{dF(z(t))}{dt} = \frac{dF(z(t))}{dz}\frac{dz(t)}{dt} \tag{13}$$

となります。よって，置換積分により

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_0^1 f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt \\ &= \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dz}\frac{dz(t)}{dt}dt \end{aligned} \tag{14}$$

となり，さらに (13) 式から

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dt}dt \\ &= F(z(1)) - F(z(0)) = F(b) - F(a) \end{aligned} \tag{15}$$

となります。■

このことは，もし C が単純閉曲線（円周のような，交差しない閉曲線）なら，始点も終点も同じですから，経路によらず $\int_C f(z)dz = 0$ であることを意味しています。実は，この「閉曲線に沿って積分すると 0」については，さらに広い条件でなりたつ下記の**コーシーの積分定理**というものがあります。

> 領域 D で正則な関数 $f(z)$ について，経路 C が D の内部の単純閉曲線ならば，$\int_C f(z)dz = 0$ である。

よく似た定理ですが，前の定理では「正則関数の微分になっている関数」について，コーシーの積分定理では「正則関数」について述べています。これらの定理は，正則関数 $f(z)$ に対しては $F'(z) = f(z)$ となる正則関数 $F(z)$ が必ず存在すること，したがって，正則関数の微分は正則関数で，つまり正則関数は何度でも微分できることを示しています[2]。なお，経路 C が閉曲線であることを強調する時には，この積分を $\oint_C f(z)dz$ と書きます。

コーシーの積分定理の証明には，グリーン (Green) の定理が用いられます。これは，２次元の関数 $P(x,y), Q(x,y)$ があるとき，その閉曲線 C に沿った積分（線積分）と，C で囲まれた領域 D' での積分（面積分）が

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{16}$$

という関係で交換できる，というものです。

これを用いると，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とするとき

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \oint_C \{u(x,y) + iv(x,y)\}(dx + idy) \\ &= \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (vdx + udy) \\ &= \iint_{D'} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_{D'} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \end{aligned} \tag{17}$$

で，コーシー・リーマンの関係式より実部・虚部ともに 0 となります[3]。■

次回の講義では，複素関数に正則でない点，いわば「穴」がある場合に，それを囲む積分について説明し，これを実関数の定積分を求めるのに用いる方法を紹介します。

問題

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ という関係を用いて，$\sin\theta, \cos\theta$ を指数関数で表してください。
2. sin の加法定理 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ を，三角関数と指数関数の関係を使って導いてください。

参考文献

志賀浩二，複素数３０講，朝倉書店，1989. ISBN978-4-254-11481-2

[2] 正確に証明するには，もうすこし知識が必要ですが，略します。
[3] この証明も，$f'(z)$ の連続性に関してちょっと微妙なところがあります。