2018年度秋学期　応用数学（解析）　第１５回

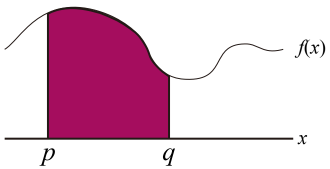
第４部・「その先の解析学」への導入

測度論(2) ルベーグ積分

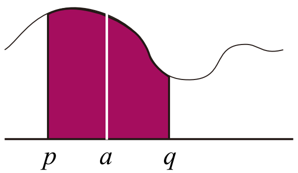
浅野　晃
関西大学総合情報学部

依然，積分に対する疑問

積分に対する疑問



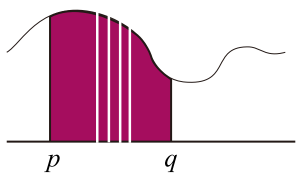
積分 $\int_p^q f(x)dx$



$\int_a^a f(x)dx = 0$ だから，

aのところで幅0の
直線を抜いても
積分の値は変わらない

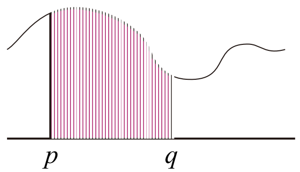
積分に対する疑問



$\int_a^a f(x)dx = 0$

幅0の直線を何本抜いても
積分の値は変わらない

どれだけ拡大してみても，
びっしりと直線がならんでいる

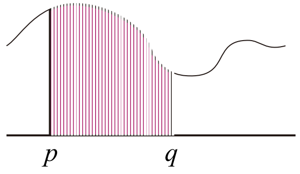


可算無限個の直線を
抜いても

積分の値は変わらない
のか？

積分に対する疑問（再び）

どれだけ拡大してみても，
びっしりと直線がならんでいる



幅0の直線を可算無限個抜いても

積分の値は変わらないのか？

この疑問に答えるために，
pとqの間にある有理数全体が占める幅を考える
可算無限個ある

有理数全体が占める幅（再び）

可算無限個ある有理数の幅を考えるには
ルベーグ測度の考え方が必要

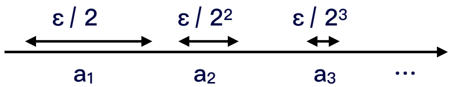
有理数の集合が数直線上で持つ幅（測度）

有理数全体を，区間の組み合わせで覆ったときの
「区間の長さの合計」の下限

有理数全体が占める幅（再び）

ε を任意の正の数とすると

有理数a_1, a_2, … を
こういうふうに覆うことができる



覆った区間の長さの合計

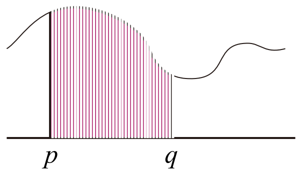
$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots = \varepsilon$$

その下限がルベーグ（外）測度で，すなわち0

有理数全体のルベーグ測度は0

積分に対する疑問

この疑問はまだ解決していない。そもそも，

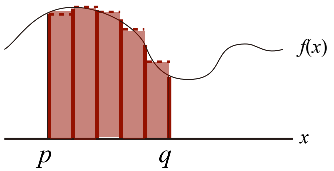


有理数の位置にある可算無限個の直線を抜いた積分

ジョルダン測度にもとづく積分（リーマン積分）では，
可算無限個の分割はできない

区分求積法で積分を求める（再び）

長方形で近似

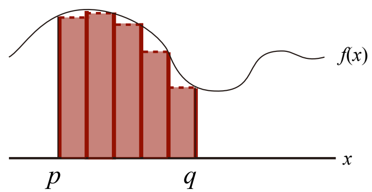


積分 $\displaystyle\int_p^q f(x)dx$ は，

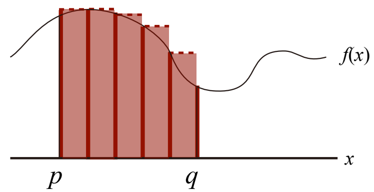
積分区間を 重なりのない，有限個の
区間に分けて，
その上の長方形の面積の極限

「極限」とは，無限ではなく有限

ジョルダン測度（再び）



こちらの上限
ジョルダン内測度

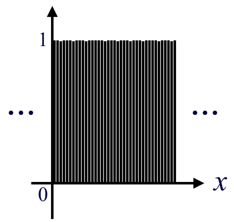


こちらの下限
ジョルダン外測度

両者が一致するときジョルダン測度という
２次元の場合これを面積という

ジョルダン測度が定まる図形（集合）を
ジョルダン可測という

こんな関数の積分は

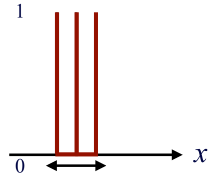


ディリクレ関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

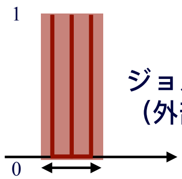
x軸上をどんなに細かく区切っても，
区切りの中に有理数も無理数も必ず存在する

ディリクレ関数の積分

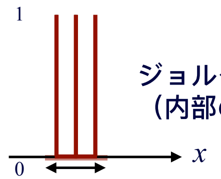


どんな区切りでも，

x軸上をどんなに細かく区切っても，
区切りの中に有理数も無理数も
必ず存在する



ジョルダン外測度
（外部の下限）



ジョルダン内測度
（内部の上限）

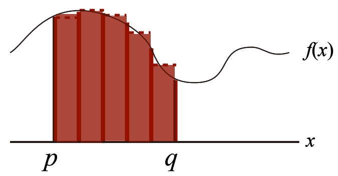
一致しないので
ジョルダン可測でなく，リーマン積分はできない

ルベーグ測度にもとづくルベーグ積分を考える

ルベーグ積分

A. Asano, Kansai Univ.

何がいけなかったのか



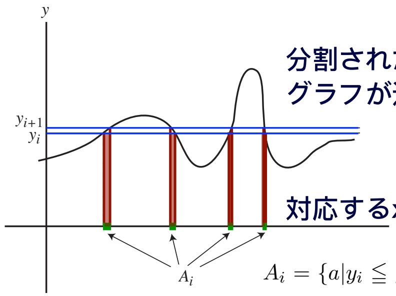
区分求積をするときに，
x軸上を無理に分割しようとするから，
有限個に分割できないとき困る

y軸上のほうを分割し，

x軸のほうは
それに対応して分割されるようにすればいい

ルベーグ積分の考え方

y軸を分割



分割されたy軸の区間を
グラフが通る部分について

対応するx軸の区間を得る

$A_i = \{a | y_i \leqq f(a) < y_{i+1}\}$

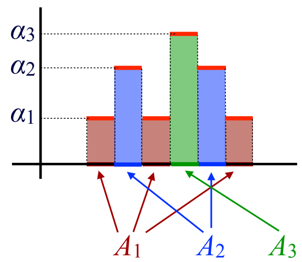
y_i ×（A_iのルベーグ測度）を求める

これを各yiについて合計したものの，
分割を細かくしたときの極限

A_iがたとえ可算無限個に分れていても，
ルベーグ可測なら完全加法性があるから合計できる

単関数とルベーグ積分

単関数…
こういう
階段状の
関数



$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x; A_i)$$

xがAiにあるとき
値が1，他は0
［特性関数］

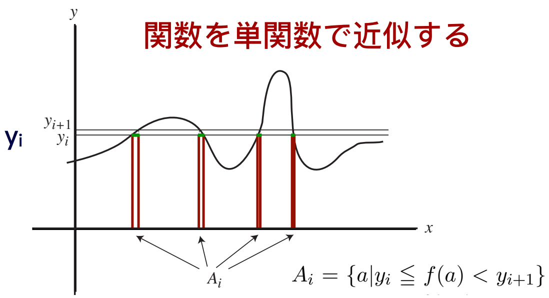
単関数のルベーグ積分

$$\int_A \varphi(x) m(dx) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i)$$

αｉ × Aiのルベーグ測度

可測関数

関数を単関数で近似する



単関数で近似できるためには，どのようにy軸を分割しても図のAiが可測でなければならない

任意のa, bについて

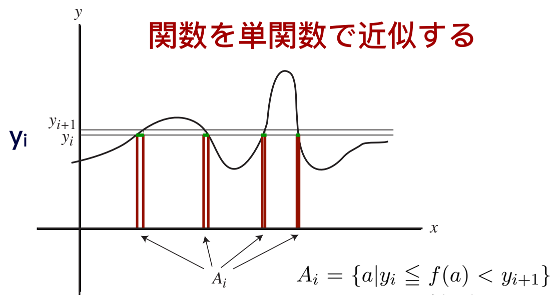
$\{x | a \leqq f(x) < b\}$が可測

[可測関数]

A. Asano, Kansai Univ.

可測関数のルベーグ積分

関数を単関数で近似する



可測関数のルベーグ積分

一番よい近似のとき

単関数で近似

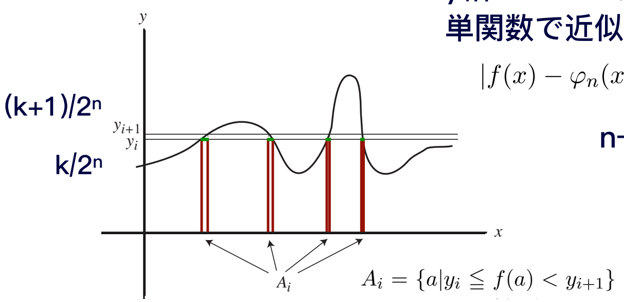
$$\int_A f(x) m(dx) = \sup \int_A \varphi(x) m(dx)$$

A. Asano, Kansai Univ.

可測関数のルベーグ積分

$$\int_A f(x) m(dx) = \sup \int_A \varphi(x) m(dx)$$

本当にsupで近似できるか？



y軸をこのように分割し単関数で近似

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

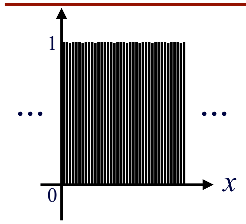
n→∞ で0

A. Asano, Kansai Univ.

積分に対する疑問の答

A. Asano, Kansai Univ.

ディリクレ関数の積分



ディリクレ関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

$$h(x) = 1 \times \varphi(x; \boldsymbol{Q}) + 0 \times \varphi(x; \boldsymbol{R} \backslash \boldsymbol{Q})$$ という単関数

xが有理数のとき1　　xが無理数のとき1

有理数のルベーグ測度は0

つまり，h(x)をどんな積分区間で積分しても0

今日のまとめ

ルベーグ積分

x軸を細かく分割するのではなく，
y軸を分割して，それにしたがってx軸が
分割される

分割されたx軸の区間の長さはルベーグ測度
で測るから，区間が可算無限個あってもよい

x軸でなくても

ルベーグ可測な集合に対する可測関数ならOK
例：事象の集合と確率