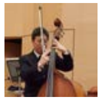
A. Asano, Kansai Univ.

2018年度秋学期　画像情報処理　第３回

フーリエ変換とサンプリング定理

浅野　晃
関西大学総合情報学部



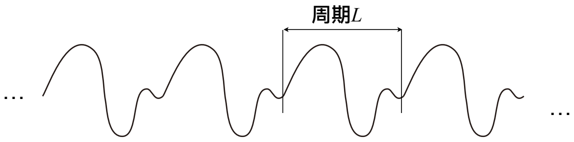
A. Asano, Kansai Univ.

フーリエ変換🤔

A. Asano, Kansai Univ.

周期関数は，フーリエ級数で表される

周期 L の周期関数 $f(x)$



$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

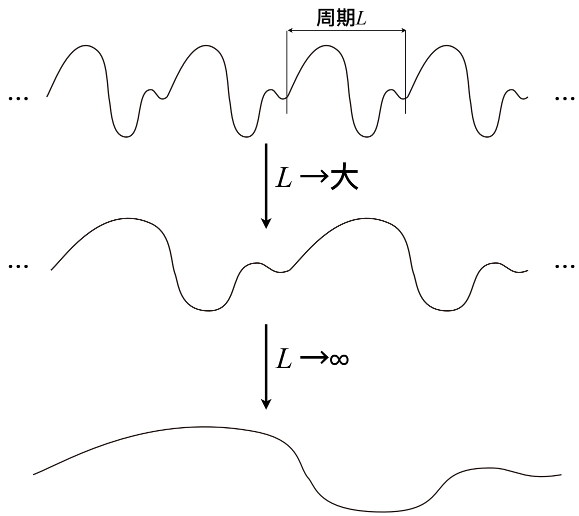
という，波の足し合わせ（級数）で表される
（フーリエ級数展開）

係数 a_k（フーリエ係数）は

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right)dx$$

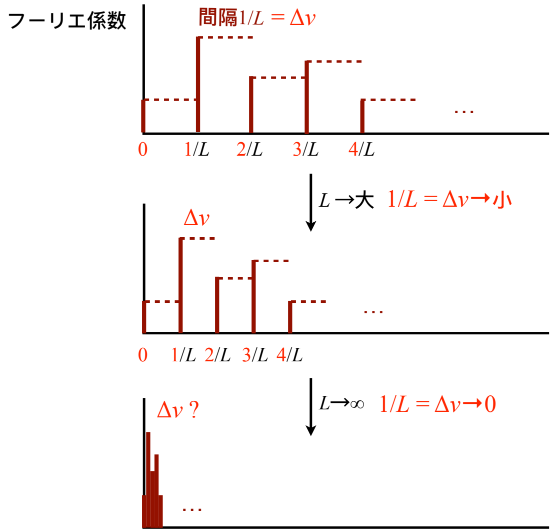
A. Asano, Kansai Univ.

周期関数でない場合は？



非周期関数は
周期が無限大と
考える

周期 L が大きくなっていくと



間隔$1/L$ は
周波数の差
これを$\Delta\nu$ で表す

フーリエ係数が
隙間なく並ぶ

↓

もはや足し算は
できない

級数から積分へ

周期 L の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right) dx$$

$1/L = \Delta\nu$ と書き換える

紛らわしいので別の文字に

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n\Delta\nu\tau)\, d\tau\right) \exp(i2\pi n\Delta\nu x)$$

級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので，ν であらわす

$L\to\infty$のとき$\Delta\nu\to 0$

このとき

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n\Delta\nu\tau)\, d\tau\right) \exp(i2\pi n\Delta\nu x)$$

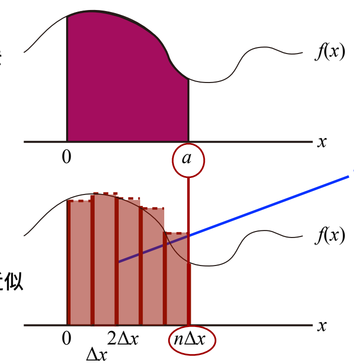
のなかの総和（Σ）が,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau)\, d\tau\right) \exp(i2\pi\nu x)\, d\nu$$

という積分になる　　　？？？😵

積分とは？

この面積を
求めたい



幅が Δx の
長方形で近似

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

$\Delta x \to 0$
区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)\,dx$$

これが積分

級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので，ν であらわす
$L\to\infty$のとき$\Delta\nu\to 0$

このとき

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right) d\tau \right) \exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$$

のなかの総和（Σ）が，

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp\left(-i2\pi\nu\tau\right) d\tau \right) \exp\left(i2\pi\nu x\right) d\nu$$

という積分になる　　　　！！！

フーリエ変換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp\left(-i2\pi\nu\tau\right) d\tau \right) \exp\left(i2\pi\nu x\right) d\nu$$ を

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i2\pi\nu x\right) dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp\left(i2\pi x\nu\right) d\nu$$

と分けて書く

フーリエ変換対　という

まとめ・フーリエ変換

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i2\pi\nu x\right) dx$$ フーリエ変換

関数 $f(x)$ に，どのような周波数の波がどれだけ含まれているか，「波を切り出す」

フーリエ係数の並びだったのが，周波数の間隔がどんどん小さくなって，ついにはひとつの関数 $F(\nu)$ になる

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp\left(i2\pi x\nu\right) d\nu$$ 逆フーリエ変換

周波数 ν の波 $\exp(i2\pi x\nu)$ に，対応するフーリエ係数 $F(\nu)$ をかけたものを合計（積分）すると $f(x)$ に戻る

2 次元の場合は

1 次元のフーリエ変換　$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i2\pi\nu x\right) dx$

2 次元のフーリエ変換

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$$

この式は，x, y それぞれに 1 次元のフーリエ変換をしたことになっている

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy$$

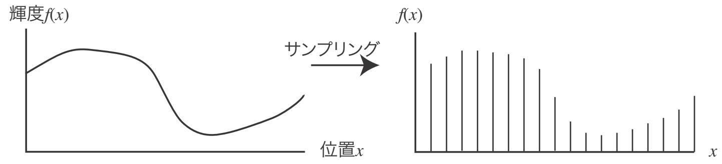
注：$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$

サンプリングとサンプリング定理🤔

A. Asano, Kansai Univ.

サンプリングとサンプリング定理

連続関数を　　　　離散的に



サンプリング定理

ある程度細かい間隔でサンプリングすれば，
もとの連続関数に戻せる

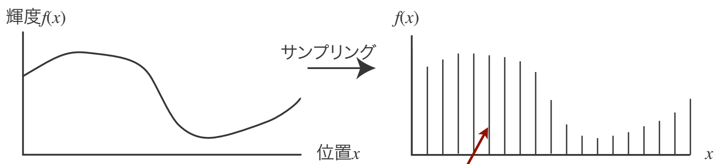
どのくらい細かくなければならないかは，
もとの関数に含まれる最高の周波数による

「細かい」関数は
細かくサンプリング

A. Asano, Kansai Univ.

サンプリングとは

連続関数を　　　　離散的に



この１本１本は何？

ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

A. Asano, Kansai Univ.

ディラックのデルタ関数$\delta(x)$

$$\delta(x) = 0 \;\; (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$x = 0$ の１点以外
すべてゼロ

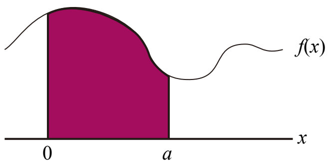
$x = 0$ をはさんで
積分すると1

何ですかこれ？？😲

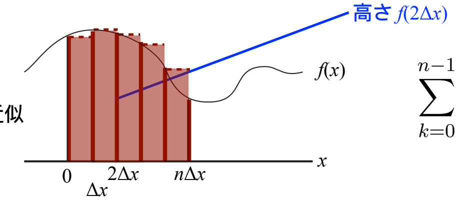
A. Asano, Kansai Univ.

積分って何でしたっけ？

この面積を
求めたい



幅が Δx の
長方形で近似



$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

$\Delta x \to 0$
区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)dx$$ これが積分

しかし，デルタ関数は
１点以外すべてゼロで
幅はないのですが…

A. Asano, Kansai Univ.

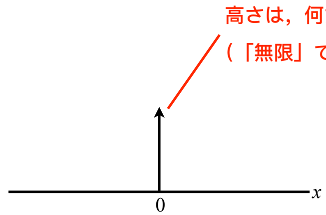
ディラックのデルタ関数$\delta(x)$

$$\delta(x) = 0 \ \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$x = 0$ の１点以外
すべてゼロ

$x = 0$ をはさんで
積分すると1

高さは，何だともいえない
(「無限」でもない。なぜなら→ $\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x)dx = k$



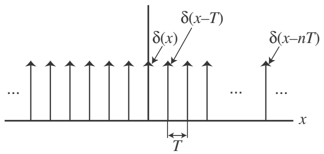
こんなふうに
表さざるを得ない

A. Asano, Kansai Univ.

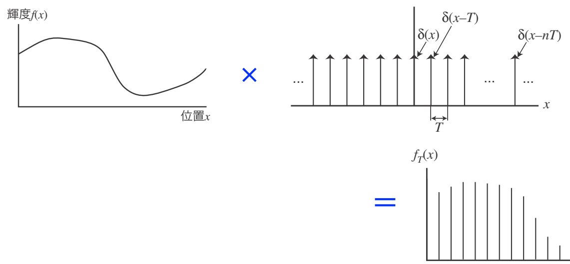
くし形関数$\mathrm{comb}_T(x)$とサンプリング

くし形関数

$$\mathrm{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$$



サンプリング　$f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x)$

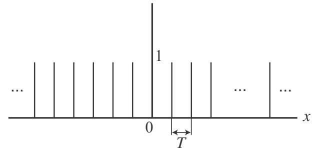


A. Asano, Kansai Univ.

こんなややこしい関数でなければいけないの？

ディラックのデルタ関数ではなく，
「縦棒」を並べて，くし形関数にしてはだめ？

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$



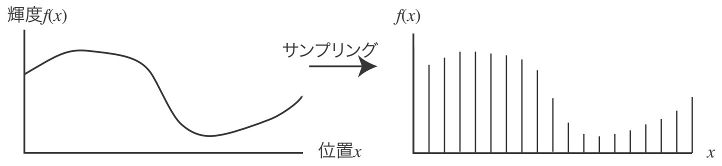
だめです。

こっちの関数は，幅がなくて高さ1だから，
積分したらゼロ→画像の輝度の合計がゼロのはずはない

ディラックのデルタ関数は，幅がないのに積分したら1
というヘンな関数（超関数）

A. Asano, Kansai Univ.

サンプリングされたら，周波数の範囲は？



周波数がある範囲に
入るとき

サンプリング後は
どうなる？

サンプリングされた関数である
$f_T(x)$ のフーリエ変換を求める

$$f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x)$$

２つの関数のかけ算の
フーリエ変換は？

かけ算のフーリエ変換

こうなります

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu)$$

かけ算のフーリエ変換　フーリエ変換と　フーリエ変換の

？？？🤔

＊は，コンヴォリューション（畳み込み）といいます

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

その意味は，少し後で…

サンプリングされた関数のフーリエ変換

つまり

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu)$$

サンプリングされた
関数のフーリエ変換

もとの関数のフー
リエ変換と

くし形関数のフー
リエ変換の

コンヴォリューション

くし形関数のフーリエ変換は

$$FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\mathrm{comb}_{1/T}(\nu)$$

くし形関数のフーリエ変換はくし形関数，
ただし間隔が逆数

くし形関数とのコンヴォリューション

つまり

$$FT[f_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\{FT[f(x)](\nu) * \mathrm{comb}_{1/T}(\nu)\}$$

サンプリングされた
関数のフーリエ変換

もとの関数のフー
リエ変換と

くし形関数の

コンヴォリューション

「くし形関数とのコンヴォリューション」とは？

「デルタ関数とのコンヴォリューション」を
並べたもの

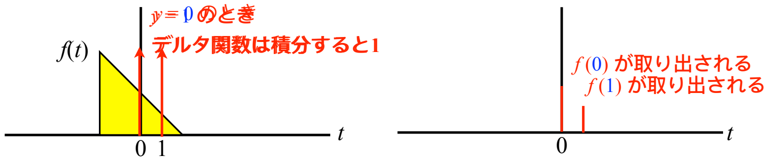
デルタ関数とのコンヴォリューション

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-y)dy$$

デルタ関数は
ここが0のとき以外はゼロ
→積分してもゼロ

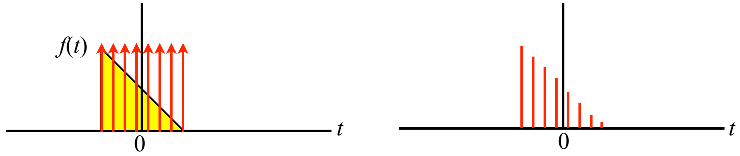
$t = 0$のとき　$f(t) * \delta(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(-y)dy$

$y = 0$ のとき以外は
積分に無関係



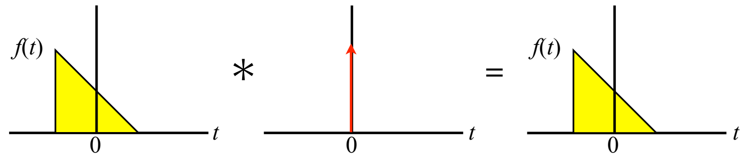
デルタ関数とのコンヴォリューション

$t = \alpha$ のとき，$f(\alpha)$が取り出される

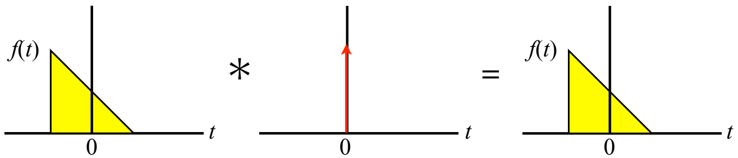


つまり

$f(x)$ とデルタ関数のコンヴォリューションは，$f(x)$ 自身

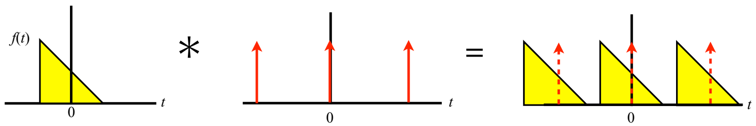


くし形関数とのコンヴォリューション

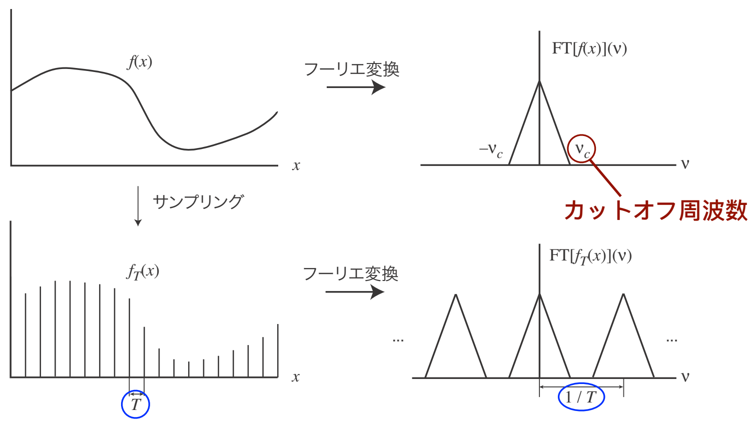


くし形関数は，デルタ関数が等間隔に並んでいる

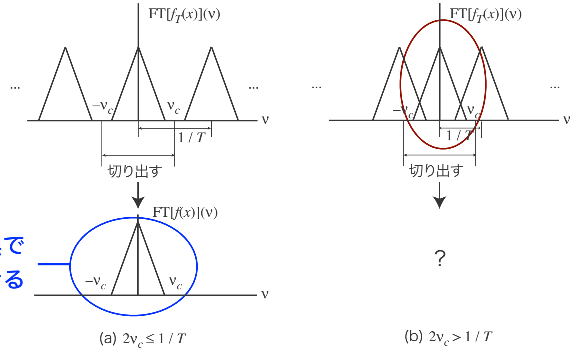
くし形関数とのコンヴォリューションは，元の関数の「コピー」が等間隔に並んだものになる



まとめると・サンプリングとフーリエ変換



周波数空間での間隔



逆フーリエ変換で
元の関数に戻せる

サンプリング間隔が,
カットオフ周波数に比べて
十分に細かければ

サンプリング間隔が粗いと,
周波数空間で重なり合ってしまい元には戻せない
（エイリアジング）

まとめ・サンプリング定理

ある関数（画像でも，音声でも）を，それのもつ最大の周波数の２倍以上の細かさでサンプリングしておけば，

サンプリングされたもの（ディジタル画像，ディジタル音声）から元の関数を再現できる

例）CDはサンプリング周波数が44.1kHz
→22.05kHzまでの音声が記録できる
（録音時に，それ以上の周波数の成分が入らないようにしなければならない）