

2020年度秋学期 画像情報処理 第6回
「行列」に慣れていない人のために
(第2部「画像情報圧縮」の準備)

浅野 晃
関西大学総合情報学部



※このスライドには、問題の解答例は載っていません。

ベクトルと行列の考え方

たくさんの数の組を、ひとまとめに計算する

ひとつの組がいくつの数でできていても、
同じように計算できるようにする

組の中身を意識せずにすむことによって、
さらに複雑な計算を考えることができる
(現代のプログラミングも同じ考えかた)

ベクトルの計算

$z = a_1x_1 + a_2x_2$ この計算を

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ と書く}$$

行ベクトル 列ベクトル

問題1

問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pause 

ベクトルの計算が2つ

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

この計算をまとめて

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と書く

行列

問題2

問題 2

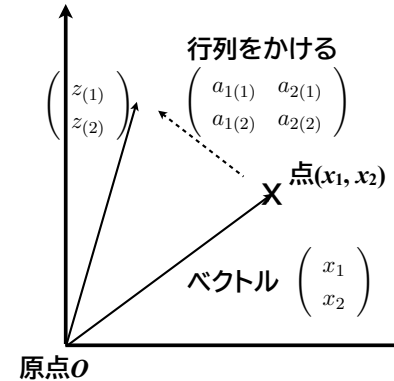
次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pause 

図形的意味

別のベクトルに変換



問題3

問題 3

問題 2 のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と、問題 2 の計算結果のベクトルを、座標平面に図示してください。

Pause 

定数倍の計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \text{ の意味}$$

行列と行列の計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

この計算をまとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$$

$\lambda_{(1)}$ に関する計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの計算が2つ

問題4

問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pause 

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}$$

なんのために???

$$= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

行列を1文字で表す

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

$$SP = P\Lambda$$

複雑な計算を、あたかも数の計算のように単純に考える

ただし

行列の積は、交換ができない
ABとBAが等しいとは限らない

転置行列・対称行列

行列 $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ **転置行列**
 ${}^t A, A^t, A^T, A'$

ある行列とその転置行列が同じとき、**対称行列**という

問題5

問題 5

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列を求めてください。
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は、それぞれは対称行列ですか。

Pause 

逆行列

行列には割り算はない

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ **単位行列**
 (かけ算をしても何もおこらない)
 となる A^{-1} を、 A の**逆行列**という

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

数の場合は

$$a \times \frac{1}{a} (\text{逆元}) = 1 (\text{単位元})$$

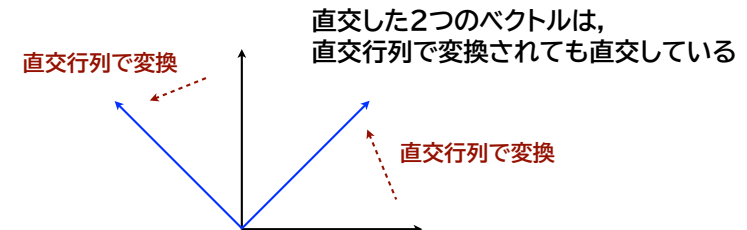
行列の場合は

$$AA^{-1} (\text{逆行列}) = I (\text{単位行列})$$

直交行列

逆行列が転置行列と同じであるような行列を**直交行列**という

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 直交行列の列ベクトルどうしは直交している
 ベクトルの「直交」の定義は「内積が0」



問題6

問題 6

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

が直交行列であることを確かめてください。

Pause 

問題7

問題 7

1. ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が直交していることを、図に描いて確認してください。
2. 座標軸の x 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で、 y 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で、それぞれ表されます。これらのベクトルを直交行列 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で変換して、変換後のベクトルも直交していることを図で確認してください。

Pause 

第2部の本題へ

第2部は画像データ圧縮

画像を、各画像で大きく異なる部分と
どの画像でもあまりかわらない部分にわけ



どの画像でもあまり変わらない部分 なんて、ある？

直交変換すると、
「大まかな部分」「細かい部分」が別
なるように組み替えられる

どの画像でもあまりかわらない部分は、ごまかす

フーリエ変換も、行列で表すと直交変換の一種