2021 年度秋学期　画像情報処理　第６回
ベクトルと行列について（数学の補足説明）（解答例付き）

今日は,「行列」や「ベクトル」の考え方の基本を，高校で習っていない人向けに手短に解説します。また，フーリエ変換を行列で表す方法で，前回さわりを説明した高速フーリエ変換について，もう一度説明します。

ベクトルと行列の計算

ベクトル

次回（第７回）のテキストでは,「画素が２つしかない画像」を考えて，その画素値 x_1, x_2 を

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{1}$$

という式で画素値 z に変換する，という話が出てきます。これを,「ベクトル」の書き方では，次のように書きます。

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

右辺の左側の () を**行ベクトル**，右側の () を**列ベクトル**といいます。また，この計算はベクトル同士のかけ算の一種で，**内積**といいます。このように数字を () に入れて並べるだけで，上の (1) 式の計算をしたことになります。

問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

（解答例）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 3 + 8 = 11$$

■

行列

最初の「画素が２つしかない画像」x_1, x_2 を，別の「画素が２つしかない画像」次に，上の (1) 式のような計算が２組ある場合を考えます。もともとの画素値が x_1, x_2 の２つの組だったので，これを別の２つの画素値の組に，２組の計算で変換する場合にあたります。このとき，それぞれの組を添字 (1) と (2) で区別して，変換後の画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ を求める計算を，ベクトルで表すと

$$
\begin{aligned}
z_{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
z_{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}
$$

となります[1]。この２つの式をひとつにまとめて，次のように書きます。

$$
\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{5}
$$

この式の右辺にある，数の４つ入った () を**行列**といい，右辺の計算を「行列とベクトルのかけ算」といいます。行ベクトルが列になって並んでいるので，行列とよぶわけです。

問題 2

次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}
$$

（解答例）

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

■

行列，ベクトルと座標平面

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を座標平面でのある点と考えると，(5) 式の計算は，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ という点を $\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix}$ という点に移動する計算を表す，ということもできます。また，このときベクトルという言葉を使うと，「$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は原点から点 (x_1, x_2) をさすベクトル（位置ベクトル）である」といいます。図形的には，原点から点 (x_1, x_2) まで伸びた矢印を想像すればよいでしょう。この言い方をすると，行列とベクトルのかけ算は，ベクトルをベクトルに変換する計算ということができます（図 1）。

問題 3

問題２のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と，問題２の計算結果のベクトルを，座標平面に図示してください。

（解答例）図２の通りです。■

[1] ふつうは，添字にこのようなカッコはつけず，a_{11}, a_{21} のように書きます。ここでは，添え字の意味をわかりやすくするために，このようにカッコをつけて書いています。

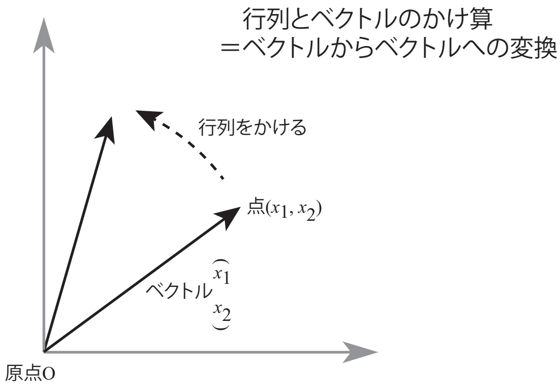

図 1: 行列とベクトルのかけ算.

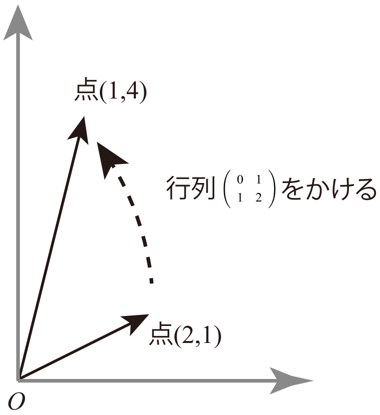

図 2: 問題 3 の解答例.

行列と行列のかけ算

次回（第 7 回）のテキストには,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

という形の式も出てきます。ここで，右辺の λ は普通の数（スカラー）で，このとき右辺は $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ を表します。

次回のテキストでは，この式を満たす a_1, a_2 は 2 組あるので，λ もそれぞれに対応して 2 つある，という話になっています。それらを $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ と表すと，それぞれに対応する式は

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

と表されます。

では，今度はこれらの２つの式を，ひとつにまとめて表してみましょう。列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$ を左右にくっつけて，$\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$ と，ひとつの行列で表します。すると，(8) 式，(9) 式の２つの式は，まとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \tag{10}$$

と表すことができます。このように，２つの「行列とベクトルのかけ算」をひとつの式に書いたのが，「行列と行列のかけ算」です。

本当にそうなっていることを確かめてみましょう。(10) 式の左辺は，上で述べたとおり，

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \right)$$

のように列ベクトルを左右にくっつけたものです。

一方，(10) 式の右辺も，右側の行列を列ベクトルに分けて

$$\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \right)$$

と表すと，左側の行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$ と右側の行列の左側の列ベクトル $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$ の積は

$$\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{1(1)} + 0 \cdot a_{1(2)} \\ \lambda_{(1)} a_{2(1)} + 0 \cdot a_{2(2)} \end{pmatrix} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{1(1)} \\ \lambda_{(1)} a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

となります。右側の列ベクトルについても同様です。このように，（行列×列ベクトル）のかけ算を２つ同時に行うのが，行列のかけ算です。

問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

(解答例)

右側の行列を，$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ の 2 つのベクトルに分けます。ひとつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times 2+1\times 1\\1\times 2+2\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

となり，ふたつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times 1+1\times 0\\1\times 1+2\times 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

となります。よって，これらの 2 つのベクトルを並べて

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}$$

となります。■

要素が p 個あるベクトルの場合

ここまでは，「画素が 2 つしかない画像」を考えたところから出発して，2 つの要素からなるベクトルについての計算を考えてきました。では，「要素が p 個あるベクトル」の場合を考えてみましょう。

(8) 式，(9) 式の形の式を，要素が p 個の場合に表すと，

$$\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p}\\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p}\\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\ a_p\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\ a_p\end{pmatrix} \tag{12}$$

となります。また，(10) 式を，要素が p 個のベクトルの場合に表すと，

$$\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p}\\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p}\\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)}\\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)}\\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)}\\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)}\\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{(1)} & & & 0\\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)}\end{pmatrix} \tag{13}$$

となります。

こんな式は，大変複雑でとても扱いきれません。また，要素が p 個ある場合は，ベクトルも p 次元空間での「矢印」になり，2 次元の場合のように図形的に考えることもできません。

そこで，(13) 式の各行列をそれぞれひとつの文字で表して，

$$SP = P\Lambda \tag{14}$$

と表してしまいます。こうしてしまうと，2 次元でも p 次元でも変わりはありません。このように，**複雑な計算をあたかも数の計算のように表して，単純な形で理解しようというのが，行列というものが考えられた理由**です。

ただし，行列のかけ算では，積 AB と積 BA は同じとは限りません。すなわち，数のかけ算とは違って，かける順番が問題になります。

転置行列と対称行列

転置行列とは，ある行列の行と列を入れ替えたもので，例えば行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ です。行列 A の転置行列を，${}^tA, A^t, A^T, A'$ などと表します。今回の講義のプリントでは最後の A' を使っていますが，これは統計学の教科書に多い方式です。さらに，ある行列とその転置行列が同じとき，その行列を**対称行列**といいます。

問題 5

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列を求めてください。
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は，それぞれは対称行列ですか。

（解答例）

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ です。
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で，もとの行列とは異なるので，対称行列ではありません。一方，

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で，もとの行列と同じなので，これは対称行列です。■

逆行列と単位行列

さきほど「行列と行列のかけ算」を説明しましたが，行列には「割り算」はありません。そのかわりにあるのが**逆行列**です。

数の割り算で，例えば「2 で割る」という計算は，「$\frac{1}{2}$ をかける」のと同じです。この 2 つの数字は，$2 \times \frac{1}{2} = 1$ で，「かけると 1」という関係になっています。この “1” は，「かけても何もおこらない数」で，単位元といいます。

これと同じように，「かけても何もおこらない行列」を考えます。これを**単位行列**といい，I で表します。つまり，単位行列 I は，どんな行列 X に対しても $XI = IX = X$ となる行列のことです。そして，

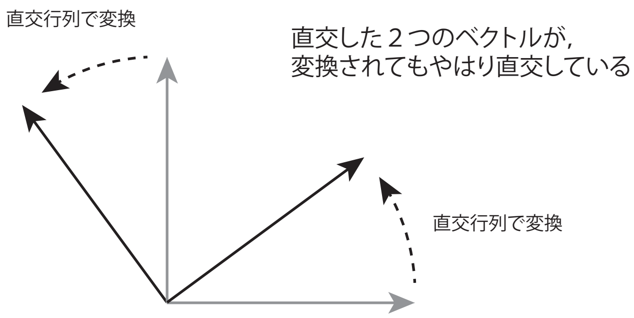

図 3: 直交行列によるベクトルの変換.

行列の A の逆行列 A^{-1} とは，$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ となる行列のことで，「かけると I」という関係になっています。つまり，逆行列 A^{-1} をかけることが，あたかも「行列 A で割る」のと同じような計算になっています。例えば，行列の積 XA に右から A^{-1} をかけると $XAA^{-1} = X$ となり，「A で割った」のと同じことになっているのがわかります。

また，(14) 式の $SP = P\Lambda$ という関係は，逆行列を使うと

$$P^{-1}SP = \Lambda \tag{15}$$

とも表されます。

単位行列の中身は，左上から右下に向かう対角線上の数（対角成分）がすべて 1，他はすべて 0 になります。2 次元の場合，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が単位行列です。

直交行列

直交行列とは，逆行列が転置行列と同じであるような行列です。つまり，行列 R が

$$R'R = RR' = I \tag{16}$$

のとき，R は直交行列です。

「直交行列」という名前は，直交行列に含まれる各列ベクトルが互いに直交していて，いずれも大きさが 1 であることをさしています。このことを，各列ベクトルが**正規直交基底**をなす，といいます。なお，「2 つのベクトルが直交している」とは，図形的にはまさに「直角に交わる」ことですが，定義としては「それらの内積が 0 である」ことをいいます。

もともと直交している 2 つのベクトルを直交行列で変換すると，それぞれを変換したベクトルもやはり直交しています。図形的には，直交座標の座標軸を直交したまま回転する計算は，直交行列をかける計算で表されます（図 3）。

問題 6

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

が直交行列であることを確かめてください。

（解答例）次のとおりです。

$$\begin{aligned} R'R &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\times 1+(-1)\times(-1) & 1\times 1+(-1)\times 1 \\ 1\times 1+1\times(-1) & 1\times 1+1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} RR' &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\times 1+1\times 1 & (-1)\times 1+1\times 1 \\ 1\times(-1)+1\times 1 & (-1)\times(-1)+1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned} \tag{19}$$

■

問題 7

1. ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が直交していることを，図に描いて確認してください。
2. 座標軸の x 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で，y 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，それぞれ表されます。これらのベクトルを直交行列 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で変換して，変換後のベクトルも直交していることを図で確認してください。

（解答例）

1. 図 4 のとおりで，この 2 つのベクトルは直交しています。
2. x 軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

で，y 軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

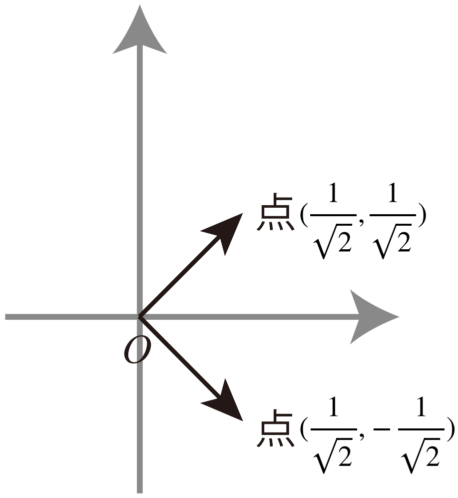

図 4: 問題 7-1.

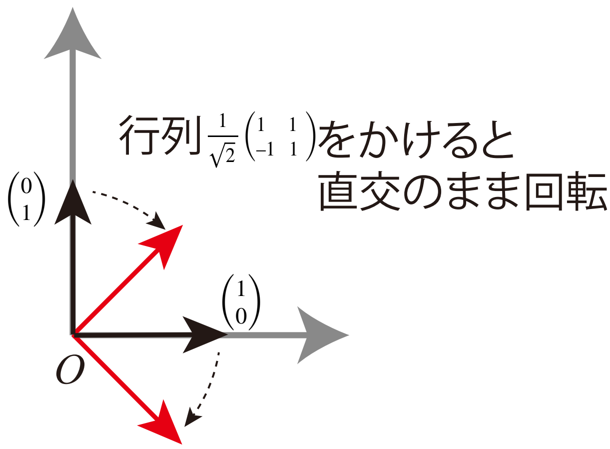

図 5: 問題 7-2.

です。つまり，この行列の 2 つの列ベクトルがそのまま取り出されます（上で出てきた「単位行列」を思い出してください)。したがって，図 5 のように，x, y 軸が，直交したまま 45 度回転したものに変換されたということができます。■

高速フーリエ変換（続き）

前回簡単に説明した「高速フーリエ変換」を，フーリエ変換の計算を行列で表す方法で考えてみましょう。前回と同様に，離散フーリエ変換の式

$$U(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{N} n\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{20}$$

で，計算する点の数が 4，すなわち $N = 4$ とすると，(20) 式は

$$U(k) = \sum_{n=0}^{3} u(n) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{4} n\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, 3) \tag{21}$$

となります。この計算は，4^2 回のかけ算でできています。

この計算を，行列を用いて表してみます。ここで，前回と同様に

$$W \equiv \exp\left(-i\frac{2\pi}{4}\right) \tag{22}$$

とおくと，

$$
\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0\cdot 0} & W^{0\cdot 1} & W^{0\cdot 2} & W^{0\cdot 3} \\ W^{1\cdot 0} & W^{1\cdot 1} & W^{1\cdot 2} & W^{1\cdot 3} \\ W^{2\cdot 0} & W^{2\cdot 1} & W^{2\cdot 2} & W^{2\cdot 3} \\ W^{3\cdot 0} & W^{3\cdot 1} & W^{3\cdot 2} & W^{3\cdot 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix} \tag{23}
$$

すなわち

$$
\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} \\ W^{0} & W^{1} & W^{2} & W^{3} \\ W^{0} & W^{2} & W^{4} & W^{6} \\ W^{0} & W^{3} & W^{6} & W^{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix} \tag{24}
$$

という行列の掛け算で表すことができます。

ここで，右辺にある列ベクトルの要素の順番を，$u(0), u(2), u(1), u(3)$ の順に変えます。すると，

$$
\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} \\ W^{0} & W^{2} & W^{1} & W^{3} \\ W^{0} & W^{4} & W^{2} & W^{6} \\ W^{0} & W^{6} & W^{3} & W^{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \tag{25}
$$

となります。さらに

$$
W^4 = \exp\left(-i2\pi\frac{4}{4}\right) = 1 = W^0 \tag{26}
$$

を用いると，

$$
\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} \\ W^{0} & W^{2} & W^{1} & W^{3} \\ W^{0} & W^{0} & W^{2} & W^{2} \\ W^{0} & W^{2} & W^{3} & W^{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \tag{27}
$$

と表すことができます。

この右辺の行列を，次のように 2 つの行列の積で表します。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0W^0 & W^0W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1W^0 & W^1W^2 \\ W^0 & W^0 & W^2W^0 & W^2W^0 \\ W^0 & W^2 & W^3W^0 & W^3W^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^1 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

このように表したとき，後半の「行列掛けるベクトル」の計算は，実際には

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{29}
$$

の 2 つの「分割された行列」の計算を行っているのと同じです。このそれぞれで，W^m $(m = 0, 1, 2, 3)$ を掛ける計算を 4 回ずつ行っています。一方，(28) 式の右辺の最初の行列を掛ける計算では，W^m を掛ける計算は 4 回行います。したがって，W^m を掛ける計算は $4 + 4 \times 2 = 12$ 回で，元の $4^2 = 16$ 回から減っています。

(29) 式の 2 つの計算は，$N = 2$ のフーリエ変換になっています。つまり，「$N = 4$ のフーリエ変換」を，「$N = 2$ のフーリエ変換が 2 回＋掛け算 4 回」で表したことになります。同様に，「$N = 8$ のフーリエ変換」を「$N = 4$ のフーリエ変換が 2 回＋掛け算 8 回」で表すことができます。そこで，この分割を繰り返し適用して，

$N = 8$ のフーリエ変換 $\rightarrow$
掛け算 8 回 $+\ 2\ \times$（$N = 4$ のフーリエ変換）$\rightarrow$
掛け算 8 回 $+\ 2\ \times$（ 掛け算 4 回 $+\ 2\ \times$（$N = 2$ のフーリエ変換））$\rightarrow$
掛け算 8 回 $+$ 掛け算 8 回 $+\ 2\ \times\ 2\ \times$掛け算 4 回

と表すと，$N = 8$ のフーリエ変換では元々 $8^2 = 64$ 回の掛け算が必要だったのが，$8 + 8 + 4 \times 4 = 32$ 回に減っています。一般に，N 点のフーリエ変換は元々 N^2 回の掛け算が必要だったのが，この方法で分割していくと $\log_2 N$ 段階に分割され，それぞれで N 回の掛け算を行うので（概ね），$N \log_2 N$ に比例した回数の掛け算で済むことになります。

このように，問題を半分，さらに半分，さらに半分…と分けていく方法は「分割統治 (divide and conquer) 法」とよばれ，アルゴリズムの高速化によく用いられるものです。数字を大きさの順に並べ替える「ソーティング」で，計算量を減らすための方法である「クイックソート」も，同様の考えにもとづいています。