

2025 年度秋学期 応用数学（解析） 第3回演習の解答例

有理数 a, b ($a < b$) の間には有理数しかないと仮定します。一方, m を無理数とすると, a, b は有理数ですから, $\frac{m-a}{b-a}$ も無理数で,

$$n-1 < \frac{m-a}{b-a} < n \quad (\text{A1})$$

となる整数 n が存在します (要するに, $n-1$ は無理数 $\frac{m-a}{b-a}$ を無限小数で表した時の整数部分)。

(A1) 式の左側部分から,

$$\begin{aligned} n-1 &< \frac{m-a}{b-a} \\ a &< m - (n-1)(b-a) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

となり, 右側部分からは

$$\begin{aligned} \frac{m-a}{b-a} &< n \\ m-a &< n(b-a) \\ m + (n-1)a &< nb \\ m + (n-1)a - (n-1)b &< b \\ m - (n-1)(b-a) &< b \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

が得られますから,

$$a < m - (n-a)(b-a) < b \quad (\text{A4})$$

となります。ところが, m は無理数, n, a, b は有理数ですから, $m - (n-a)(b-a)$ は無理数で, これは仮定と矛盾します。■