

1. 与式より

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3t^2x \\ \frac{dx}{x} &= 3t^2dt \\ \int \frac{dx}{x} &= \int 3t^2dt \\ \log|x| &= t^3 + C \quad (C \text{ は定数}) \\ x &= \pm e^C e^{t^3}. \end{aligned} \tag{A1}$$

よって、 $\pm e^C$  をあらためて定数  $A$  とおくと、一般解は  $x = Ae^{t^3}$  となります。初期値は  $x(0) = 1$  ですから、 $t = 0, x = 1$  を代入すると  $1 = A$  となり、特殊解は  $x = e^{t^3}$  となります。■

2. 与式より

$$\begin{aligned} t \frac{dx}{dt} &= ax \\ \frac{dx}{x} &= \frac{a}{t} dt \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{a}{t} dt \\ \log|x| &= a \log|t| + C \quad (C \text{ は定数}) \\ \log|x| &= \log(|t|^a) + C \\ x &= \pm e^C t^a. \end{aligned} \tag{A2}$$

よって、 $\pm e^C$  をあらためて定数  $A$  とおくと、一般解は  $x = At^a$  となります。初期値は  $x(1) = 1$  ですから、 $t = 1, x = 1$  を代入すると  $1 = A$  となり、特殊解は  $x = t^a$  となります。■

3. 与式より

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + ax + b &= 0 \\ dx &= -(ax + b)dt \\ -\frac{dx}{ax + b} &= dt \\ -\int \frac{dx}{ax + b} &= \int dt \\ -\frac{1}{a} \log|ax + b| &= t + C \quad (C \text{ は定数}) \\ \log|ax + b| &= a(-C - t) \\ ax + b &= \pm e^{-aC} e^{-at} \\ x &= \pm \frac{e^{-aC}}{a} e^{-at} - \frac{b}{a} \end{aligned} \tag{A3}$$

よって、 $\pm \frac{e^{-aC}}{a}$  をあらためて定数  $A$  とおくと一般解は  $x = Ae^{-at} - \frac{b}{a}$  となります。初期値は  $x(0) = \frac{1-b}{a}$  ですから、これを代入すると  $\frac{1-b}{a} = A - \frac{b}{a}$  より  $A = \frac{1}{a}$  で、特殊解は  $x = \frac{e^{-at} - b}{a}$  となります。■