

2025年度春学期

応用数学(解析)

第4部・「その先の解析学」への導入 /

第13回

複素関数論ダイジェスト(2)

孤立特異点と留数



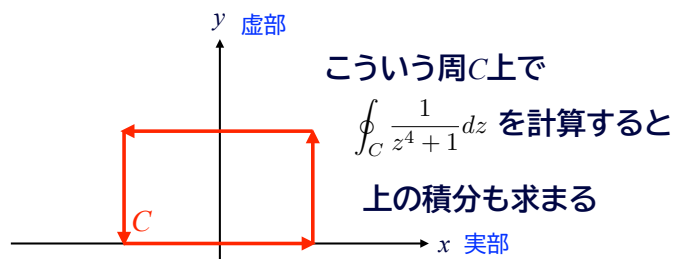
関西大学総合情報学部
浅野 晃

なにをするんでしたっけ？🤔

こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \text{ まっとうには計算できません。}$$

そこで 数直線を 複素平面に拡張 $z = x + yi$

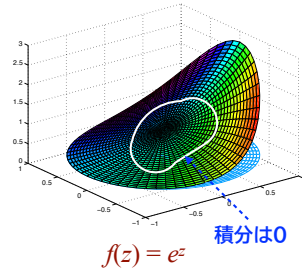


前回の復習
コーシーの積分定理

コーシーの積分定理

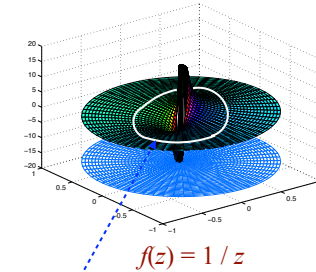
複素関数 $f(z)$ が、領域 D での正則関数で
経路 C が、 D 内にある単純閉曲線ならば

$$\int_C f(z) dz = 0$$



ここからの話は

正則でない点を囲んで積分したら？



積分は？
正則でない「穴」によって決まる

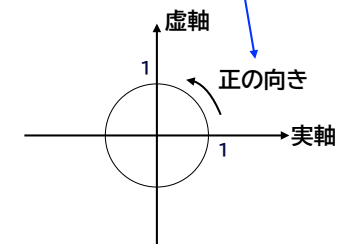
$f(z) = z^n$ の積分

z^n の積分を考える

関数をべき級数で表して、各項の積分を考えるため

$f(z) = z^n$ を、単位円周 C に沿って 正の向き に回って積分する

複素平面において
原点を中心とする
半径1の円周



z^n の積分を考える

$n = 0, 1, 2, \dots$ のとき

$f(z) = z^0, z^1, z^2, \dots$ が単位円周 C の内部で正則なので

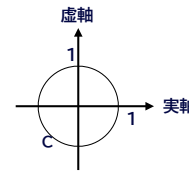
コーシーの積分定理により
$$\oint_C f(z) dz = 0$$

z^n の積分を考える

$n = -1, -2, -3, \dots$ のとき

ややこしいので、あらためて $f(z) = \frac{1}{z^n}$ とおいて $n = 1, 2, 3, \dots$ とする

経路 C 上では $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) つまり $\frac{1}{z^n} = \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = e^{-in\theta}$



よって
$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \frac{dz}{d\theta} d\theta && \text{置換積分} \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} i e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta \end{aligned}$$

z^n の積分を考える

$f(z) = \frac{1}{z^n}$ について

$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z} dz &= i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta && n=1 \\ &= i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \end{aligned}$$

$n = 2, 3, \dots$ のとき

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z^n} dz &= \frac{i}{i(1-n)} \left[e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{1-n} \left[e^{2(1-n)\pi i} - 1 \right] \end{aligned}$$

$e^{2(1-n)\pi i} = \cos(2(1-n)\pi) + i \sin(2(1-n)\pi) = 1$ より
$$\oint_C \frac{1}{z^n} dz = 0$$

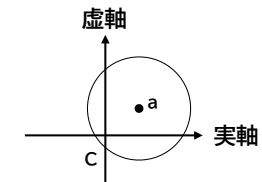
z^n の積分を考える

つまり

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad \oint_C \frac{1}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

また、 a を中心とする半径1の円周を C とすると

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$



コーシーの積分公式

コーシーの積分公式

正則関数の任意の点での値は、その点を囲む閉曲線上の値だけできまる

領域 D で正則な関数 f の、点 z における値 $f(z)$ は、
 D 内で点 z を囲み、正の方向に1周する閉曲線 C 上の積分

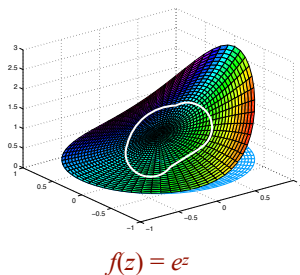
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{で表される}$$

$z=0$ のときは、原点を囲み、正の方向に1周する閉曲線 C 上の積分

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad \text{で表される}$$

コーシーの積分公式

正則関数の任意の点での値は、その点を囲む閉曲線上の値だけできまる

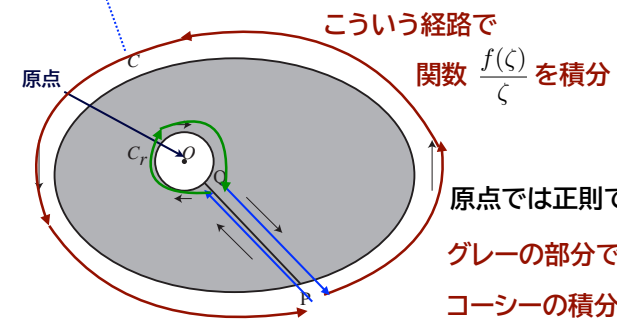


正則関数は
「折り目なく」
曲がっているから、

周囲(囲む閉曲線上)の値によって
その中心の値が決まってしまうても
不思議ではない

コーシーの積分公式

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad \text{のほうの証明を考える}$$

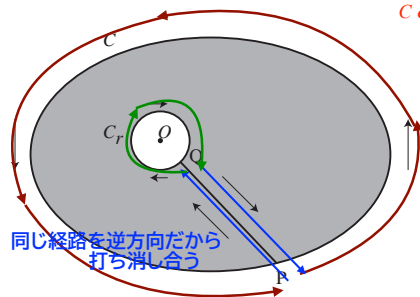


原点では正則でないが
グレーの部分では正則
コーシーの積分定理により、
積分=0

コーシーの積分公式

グレーの部分では正則 コーシーの積分定理により,

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_P^Q \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_Q^P \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0$$



Cとは逆回りだからマイナス

$$\oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = - \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

つまり

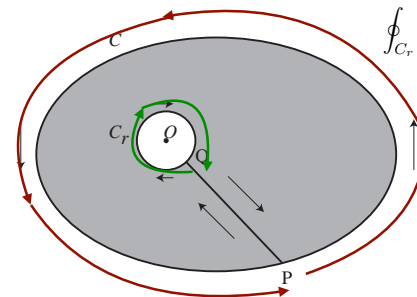
$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

同じ経路を逆方向だから
打ち消し合う

コーシーの積分公式

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad \text{内側の円の半径} \rightarrow 0 \text{ とすると}$$

$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta$ に収束する(詳細略)



$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta = f(0) \oint_{C_r} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i f(0)$$

よって $f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$

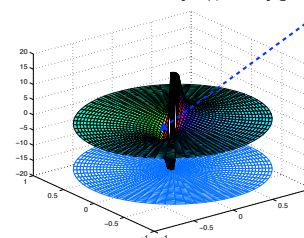
※コーシーの積分公式から、「正則関数は何度でも微分できる」ことが導かれる(概略は付録で)

孤立特異点と ローラン級数展開

ここからの見通し

孤立特異点とは

こういう、正則関数にあいた「穴」
(1点を除いて正則)

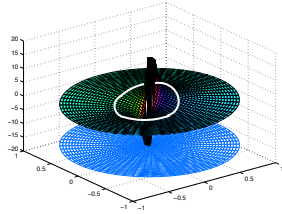


$$f(z) = 1/z$$

ここからの見通し

孤立特異点をもつ関数について

孤立特異点の周りの積分を使って
関数が級数に展開できる(ローラン級数展開)



ローラン級数を積分することで
孤立特異点の周りの積分は
「留数」だけで表されることがわかる

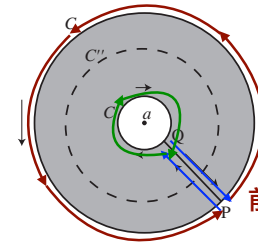
留数を別途求められれば、積分が簡単に求まる

ローラン級数展開

孤立特異点の周りの経路で積分

前と同じ考えで、コーシーの積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



前と同じ経路で

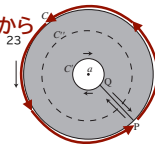
ローラン級数展開

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

等比級数の和の形

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}}$$

ζは外側の経路上だから
絶対値が1より小さく、収束する



$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^2 + \dots \right\}$$

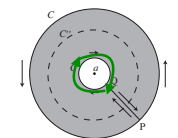
ローラン級数展開

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^2 + \dots \right\}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{z - a} \left\{ 1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^2 + \dots \right\}$$

こちらの ζ は内側の経路上



ローラン級数展開

以上から

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

孤立特異点 a のまわりのローラン級数

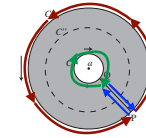
ローラン級数展開

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ところで



グレーの部分で $f(z)$ は正則なので、
コーシーの積分定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

よって、 a_{-n} も a_n で表すことができる

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{-n-1} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

留数と「n位の極」

留数

関数 $f(z)$ をローラン級数展開して、
 C'' に沿って積分

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots$$

積分するところしか残らない
この積分は $2\pi i$

つまり $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} f(z) dz$

$f(z)$ の孤立特異点 a における[留数 (residue)]という $\text{Res}(a; f)$

留数を別の方法で求められれば、 $f(z)$ の積分は簡単に計算できる

「n位の極」

ローラン級数が(左側が…でなくて)
 a_{-n} から始まるような孤立特異点を, [n位の極]という

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

このとき, 両辺を $(z-a)^n$ 倍すると

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \dots$$

つまり, $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f(z) = a_{-n}$

a が1位の極なら $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = a_{-1}$

「n位の極」と留数

さて, a が n 位の極のとき,

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

両辺を $(z-a)^n$ 倍して

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \dots$$

両辺を $(n-1)$ 回微分すると

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) = (n-1)! a_{-1} + \frac{n!}{1!} a_0(z-a) + \frac{(n+1)!}{2!} a_1(z-a)^2 + \dots$$

微分によって, a_{-1} の手前の項まで消える

「n位の極」と留数

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) = (n-1)! a_{-1} + \frac{n!}{1!} a_0(z-a) + \frac{(n+1)!}{2!} a_1(z-a)^2 + \dots$$

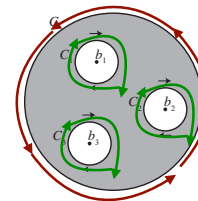
$z \rightarrow a$ とすると, これらの項は0

つまり留数は $\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z)$

1位の極なら $\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$

以上から,
孤立特異点を囲んだ閉曲線上の $f(z)$ の積分は留数で表され,
しかも n 位の極については, 留数は別途求めるので, 積分は求まる

孤立特異点がいくつあっても



$$\oint_C f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \oint_{C_2} f(z) dz - \dots = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \text{Res}(b_1; f) + \text{Res}(b_2; f) + \dots$$

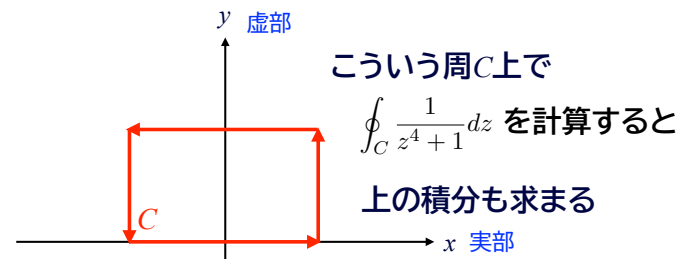
いくつかの孤立特異点を囲んだ閉曲線上の積分は,
それぞれの孤立特異点での留数がわかれば求められる

ようやく、最初の問題へ

こんな積分は

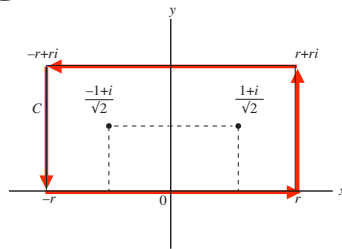
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \text{ まっとうには計算できません。}$$

そこで 数直線を 複素平面に拡張 $z = x + yi$



複素関数にして積分する

$\oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz$ を計算する 経路は



$$\frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})}$$

孤立特異点 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ は、すべて1位の極
展開するまでもなく

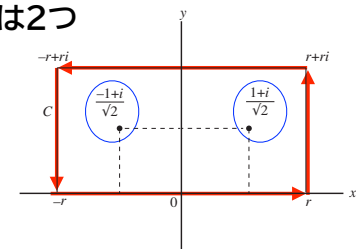
複素関数にして積分する

経路の内部にある孤立特異点は2つ

それぞれ留数を求める

1位の極だから

$$\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$$



$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} (z - \frac{1+i}{\sqrt{2}})f(z) = \frac{1}{(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})} \\ &= \frac{1}{(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}})} \\ &= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

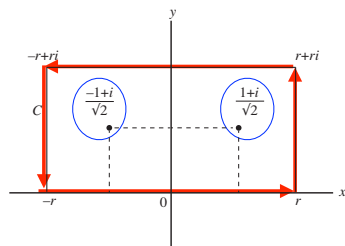
同様に $\text{Res}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f\right) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$

複素関数にして積分する

よって $\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \text{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) + \text{Res}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f\right) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$

$$\oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

では $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$ は？



$r \rightarrow \infty$ のとき、実軸上以外は0
(略、テキストで)

よって $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

問題🌀
(さわりだけ)

問題

次の積分(C は原点を中心とする半径2の円周)を求めてください。

$$\frac{-1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz$$

なお、複素三角関数は、三角関数と指数関数の関係を拡張して、 z を複素数とすると、下のように定義する

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

問題

次の積分(C は原点を中心とする半径2の円周)を求めてください。 $\frac{-1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz$

$\frac{\sin z}{\cos z}$ の孤立特異点は、 $\cos z = 0$ となる点(零点)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \text{ とおくと } e^{iz} + e^{-iz} = 0 \text{ で、両辺に } e^{iz} \text{ をかけると } e^{2iz} + 1 = 0$$

$e^{i\theta}$ は周期 2π の周期関数(なぜならば、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$)で、また $e^{i\pi} + 1 = 0$ より

$$2iz = i(\pi \pm 2n\pi) \text{ すなわち } z = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

問題

次の積分(C は原点を中心とする半径2の円周)を求めてください。 $\frac{-1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz$

$$z = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

原点を中心とする半径2の円の内部で, $z = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ を

満たす z は $z = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ これが孤立特異点, すなわち「穴」

よって, $\oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}\right) + \operatorname{Res}\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}\right) \right)$ **あとはテキスト**
(演習問題の解答例)で

今日のまとめ

孤立特異点とローラン級数展開

孤立特異点の周りの積分を使って
関数を級数に展開することができる

留数

ローラン級数の形で積分すると
孤立特異点の周りの積分は留数で表せる

留数を使って積分を求める

n 位の極については, 留数を別の方法で求めることで,
積分が簡単に求められる