

2025 年度秋学期 応用数学 (解析) 第 13 回演習の解答例

$\frac{\sin z}{\cos z}$ の孤立特異点は、 $\cos z = 0$ となる点 (零点) です。

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \quad (\text{A1})$$

とおくと $e^{iz} + e^{-iz} = 0$ で、両辺に e^{iz} をかけると $e^{2iz} + 1 = 0$ となります。 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ という関係から $e^{i\theta}$ は周期 2π の周期関数で、さらにオイラーの式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ を考えると、

$$2iz = i(\pi \pm 2n\pi) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A2})$$

となり、ここから $z = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が得られます。

原点を中心とする半径 2 の円の内部で、 $z = \frac{\pi}{2} \pm n\pi = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を満たす z は、 $z = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ です。よって

$$\oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}\right) + \operatorname{Res}\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}\right) \right) \quad (\text{A3})$$

となります。

孤立特異点 $z = \frac{\pi}{2}$ について、本文の (21) 式で $n = 1$ として

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin z}{\cos z} &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin z}{-\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= - \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin z \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

で、 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ 、 $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} = 1$ なので、 $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin z}{\cos z} = -1$ となります。すなわち、 $z = \frac{\pi}{2}$ は 1 位の極で、このとき (27) 式のとおり $\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}\right) = -1$ です。

同様に、孤立特異点 $z = -\frac{\pi}{2}$ については

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left(z - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \frac{\sin z}{\cos z} &= \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left(z + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin z}{\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin z \frac{z + \frac{\pi}{2}}{\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

で、 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ 、 $\lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{z + \frac{\pi}{2}}{\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)} = 1$ なので、 $\operatorname{Res}\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}\right) = -1$ です。

したがって、問題の答は

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz &= \frac{-1}{2\pi i} \left[2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}\right) + \operatorname{Res}\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}\right) \right) \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \cdot 2\pi i((-1) + (-1)) = 2 \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

となります。■