2025年度春学期

# 応用数学(解析)

第4部・「その先の解析学」への導入 ／

第14回
測度論ダイジェスト(1)
ルベーグ測度と完全加法性

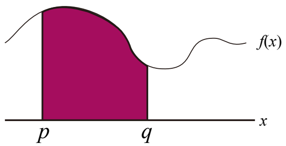
関西大学総合情報学部
浅野 晃

---

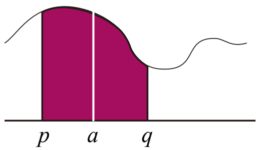
## 積分に対する疑問🤔

---

## 積分に対する疑問




積分 $\displaystyle\int_p^q f(x)dx$



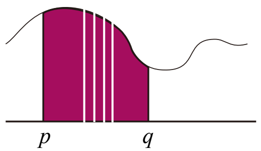

$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ だから,

$a$ のところで幅0の直線を抜いても
積分の値は変わらない



---

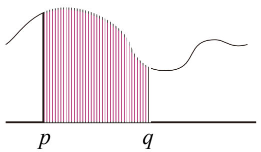
## 積分に対する疑問




$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

幅0の直線を何本抜いても
積分の値は変わらない

どれだけ拡大してみても,
びっしりと直線がならんでいる




可算無限個の直線を抜いても

積分の値は変わらないのか？

## 「数えられる」無限(再び)

1, 2, 3, … ←── そして,「無限」

自然数とは, 数えるための数字

？

自然数の集合と同じ無限を
「数えられる無限」すなわち[可算無限]という

その「個数」は[可算基数]　$\aleph_0$（アレフゼロ）

（よく「可算無限個」という）



## どうやって数えるのか(再び)

自然数と対応がつく集合は数えられる

自然数　1, 2, 3, …

集合A = {a, b, c, …}

過不足なく1対1対応がつく
([全単射]が存在する)なら

この集合の[基数]([濃度])は $\aleph_0$

[可算無限集合]という



## 偶数の集合の濃度は(再び)

偶数と自然数とは対応がつくか

自然数　1, 2, 3, …, n, …

偶数　2, 4, 6, …, 2n, …

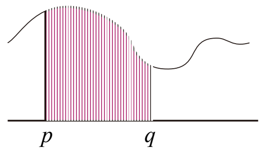
1対1対応がつく(全単射が存在する)

偶数の基数も $\aleph_0$
自然数と「個数」は同じ



## 積分に対する疑問

どれだけ拡大してみても,
びっしりと直線がならんでいる




可算無限個の直線を抜いても
積分の値は変わらないのか？

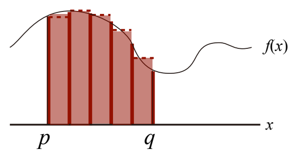
この疑問に答えるには,
「幅」「面積」というものをもっと精密に考える必要がある

「測度論」

# ジョルダン測度

## 区分求積法で積分を求める

長方形で近似




積分 $\int_p^q f(x)dx$ は,

積分区間を 重なりのない, 有限個の 区間に分けて,

その上の長方形の面積の極限

「極限」とは, 無限ではなく有限

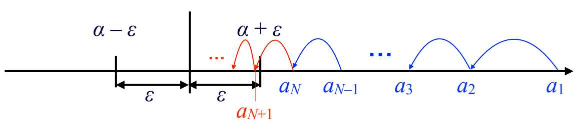


## 数列の収束の定義(再び)

数列$\{a_n\}$が $\alpha$ に収束するとは

数列が十分大きな番号 $N$ まで進めば

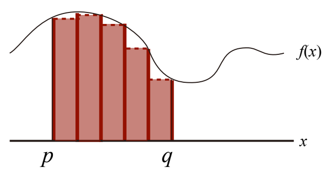
$N$ 番より大きな番号 $n$ については,
$a_n$ は, みなその狭い区間$[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$に入る



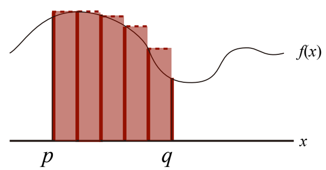

$\varepsilon$をどんなに小さくしても そういう$N$がある



## ジョルダン内測度と外測度




グラフの下側の部分の
内部におさまる長方形



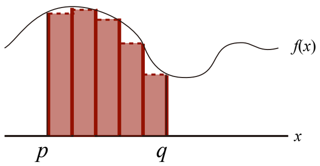

グラフの下側の部分を
内部に含む長方形

区間の分け方をいろいろ変えた時

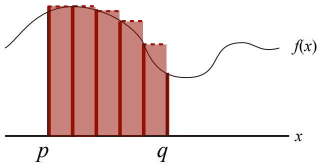
こちらの上限
[ジョルダン内測度]

こちらの下限
[ジョルダン外測度]

## ジョルダン測度




こちらの上限
ジョルダン内測度




こちらの下限
ジョルダン外測度

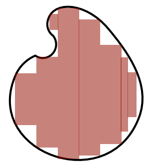
両者が一致するとき[ジョルダン測度]という
2次元の場合これを[面積]という

ジョルダン測度が定まる図形(集合)を[ジョルダン可測]という

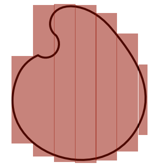


## ジョルダン測度

積分の例(区分求積法)に限らず



これの上限が
ジョルダン内測度



これの下限が
ジョルダン外測度

両者が一致するときジョルダン測度
2次元の場合これを面積という

ジョルダン測度が定まる図形(集合)をジョルダン可測という



## ジョルダン測度の性質

ジョルダン可測な集合 $A$ の, ジョルダン測度を $J(A)$ とする

$J(\emptyset) = 0$ 　空集合の測度は0

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$$

重なりのない2つの集合については和集合の測度は測度の和

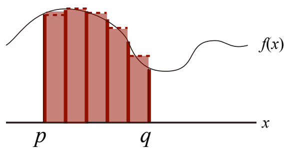
[有限加法性]という



# ルベーグ測度

## 「有限個の長方形」

長方形で近似




積分 $\int_p^q f(x)dx$ は,

積分区間を 重なりのない, 有限個の 区間に分けて,
その上の長方形の面積の極限

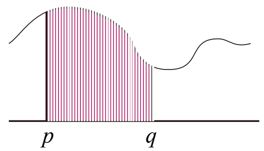
ジョルダン測度

極限は,「無限」とは違う　有限だが, 必要なだけいくらでも大きくできる



## 有限個の長方形では, 困る

どれだけ拡大してみても,
びっしりと直線がならんでいる




幅0の直線を可算無限個抜いても,
積分の値は変わらないのか？

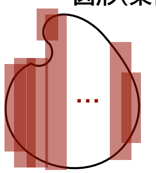
可算無限個の隙間があるところに
有限個の長方形は配置できない

こういう場合でも積分や面積を考えられるようにするには
可算無限個の長方形にもとづく測度が必要



## ルベーグ外測度

図形(集合) $S$




$S$ を
重なりを許した可算無限個の長方形で覆う

それらの長方形の面積の和の下限を

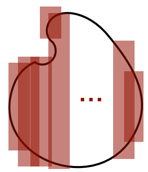
ルベーグ外測度という　$m^*(S)$

$m^*(\emptyset) = 0$　空集合の外測度は0

$S \subset T = m^*(S) \leqq m^*(T)$　包含関係と外測度の大小関係は一致



## 完全劣加法性




ジョルダン測度の「有限加法性」
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$

可算無限個の長方形を使う場合も
同じような性質がなりたたないか？

ルベーグ外測度については完全劣加法性

有界な集合の列 $S_1, S_2, \dots$ について

$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ が有界ならば $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$

可算無限個の
和集合

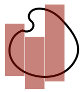
可算無限個の和集合の
外測度

可算無限個の
外測度の和

# 完全劣加法性の証明

有界な集合の列

$S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$



$S_i$ を長方形で覆う　$I_1(i)$　$I_2(i)$　$I_3(i)$ …

この覆い方は　$S_i \subset I_{1(i)} \cup I_{2(i)} \cup \cdots \cup I_{n(i)} \cup \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| < m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

面積の和が　その下限　よりも少し大きい

こういう覆い方 $I_1(i), I_2(i), I_3(i), \ldots$が存在する

他の $S_i$ についても同様だから　$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)}$

各 $S_i$ について

$I_1(i), I_2(i), I_3(i), \ldots$ で覆う



# 完全劣加法性の証明

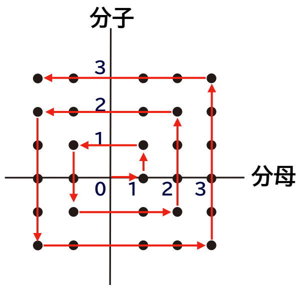
$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)}$　可算無限個の長方形の, 可算無限個の和集合

可算無限個の長方形の和集合　と同じ



# 有理数は可算か

有理数の集合は, 可算基数をもつか




分母を横軸,
分子を縦軸とすると,
有理数は図の黒点(格子点)
※分母0の点は除く　※重複あり

すべての格子点を一筆でたどれば
自然数と一対一対応がつく👉可算基数をもつ



# 完全劣加法性の証明

$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)}$　可算無限個の長方形の, 可算無限個の和集合

可算無限個の長方形の和集合　と同じ

$$\begin{aligned} m^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\Big) &\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \left( m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| < m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$\varepsilon$ は正の数であればいくらでも小さくできる

$$m^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\Big) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$$

# ルベーグ測度と完全加法性

## 可測集合

集合 $S$ が，任意の集合 $E$ について

$$m^*(E) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c)$$ であるとき，

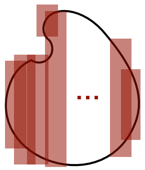
Eの外測度　　Eのうち Sである部分の 外測度　　Eのうち Sでない部分の 外測度

Sは[ルベーグ可測]である([可測集合]である)という

$m(S) \equiv m^*(S)$ を[ルベーグ測度](あるいは単に[測度])という



## 完全加法性




ジョルダン測度の「有限加法性」

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$$

可算無限個の長方形を使う場合も
同じような性質がなりたたないか？

$E_1, E_2, \ldots$ を互いに共通部分を持たない可測集合列

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$$ 完全加法性

可算無限個の和集合　　測度の可算無限個の和

(証明はテキストで)

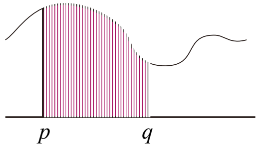
和集合の測度は測度の和
可算無限個に分けた場合でもそうなる



# 零集合と
# 「ほとんどいたるところ」💭

# 積分に対する疑問

どれだけ拡大してみても，
びっしりと直線がならんでいる




可算無限個の直線を抜いても

積分の値は変わらないのか？

この疑問に答えるために，
$p$ と $q$ の間にある有理数全体が占める幅を考える

可算無限個ある



# 有理数全体が占める幅

可算無限個ある有理数の幅を考えるには
ルベーグ測度の考え方が必要

有理数全体の集合が数直線上で持つ幅(測度)

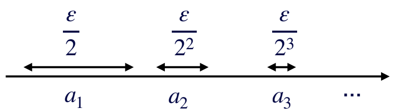
有理数全体を，区間の組み合わせで覆ったときの
「区間の長さの合計」の下限



# 有理数全体が占める幅

$\varepsilon$ を任意の正の数とすると

有理数 $a_1, a_2, \dots$ を　こういうふうに覆うことができる




区間の長さの合計

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots = \varepsilon$$

その下限は0　有理数全体のルベーグ測度は0



# 零集合と「ほとんどいたるところ」

有理数全体のルベーグ測度は0

測度が0の集合を零集合という

「測度が0の集合を除いた部分で」を
(この場合，「有理数を除いた部分で」)

「ほとんどいたるところで」(a.e.)という

# 今日のまとめ

ルベーグ外測度

可算無限個の長方形で図形を覆ったときの，
長方形の面積の合計の下限
可測集合のルベーグ外測度がルベーグ測度

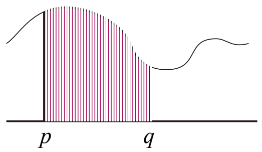
零集合と「ほとんどいたるところ」

有理数の集合のルベーグ測度は0
測度0の集合を「零集合」という
零集合を除いた部分を「ほとんどいたるところ」という



# 次回は

最初の疑問はまだ解決していない




「有理数の位置にある可算無限個の直線を
抜いた」積分は，どうやって求めるのか？

ジョルダン測度にもとづく積分では，可算無限個の分割はできない

ルベーグ測度にもとづくルベーグ積分を考える



問題について🌀

# 問題

集合 $S$ について $m^*(S) = 0$ ならば

$S$ のすべての部分集合は可測集合であり，
その測度は0である　　　　ことを証明せよ

このことから，有理数全体の集合の測度は0なので，
有限個の数からなる集合の測度も0

有理数の部分集合と
過不足のない一対一対応＝全単射をつくることができる

（証明はテキストの解答例で）